高３　ハイレベル数学ⅠＡⅡＢを受講するみなさんへ

ようこそ,『スタディサプリ』へ！　この講座を使って受験勉強を本格的にスタートする人も多いと思います．この講座は,そんなみなさんの期待に応えることができると自負しています．早速始めましょう，と言いたいところですが，何事も準備運動が大事です．いきなり走り始める前に，以下の文にちょっと目を通してください．

大学入試における数学が，知識や公式の運用という意味で高校の教科書の範囲を大きく外れるようなことはありません．しかし，知識や公式に何かしらの漏れ，誤解，理解の不十分があると，それを運用する「場面」が来てもそれに気づかないということがあります．穴だらけの状態で背伸びをして何かをつかもうと思っても体勢を崩しかねませんね．

この講座は，まずみなさんのこれまでの学習を単元別にもう一度整理し直します．ただし，見ただけですぐに公式に当てはめればできる問題は，このレベルのテキストではほとんどありません．問題を通じ，知識や公式を適する場面で運用する力をつけるために必要な問題を厳選してあります．例えばサッカーにおいて「蹴る」という技術を,「パス」「シュート」などに分け，どんなときにどんな「パス」を出せばよいのか，この場面でどんな「シュート」を打てば効果的かを学んでいく，そんなイメージに近いでしょう．

もし，そんな練習をしている時に，自分には「蹴る技術」が根本的にまだ足りない，と思うならば，今のうちにその練習をし直しておきましょう．スタディサプリには「高２」向けの講座も用意してあります．ケガをする前に，確実な技術，つまり根本からの理解をし直すことができるのは今のうちだけですよ．「急がば回れ」です．

そして後期テキストでは「総合問題」と題して，みなさんに実践（実戦）練習を積んでもらいます．いろいろな場面が絡み合いますし，どんな場面が来るか事前に予告はしません．どこかで見たことのある場面から，初めて出会う場面をどう切り拓くかまで，幅広く．

そして講義問題については「動画授業」でその理解を全面的にバックアップします．「百聞は一見にしかず」．教わることで，新たな発見，自分の理解をより強固なものにする，視覚と聴覚の両方に訴えかける，といったさまざまな効果があります．

もちろん，この講座だけをやればよいのではありませんよ．さらなる力をつけるために学校等で配布された問題集などでより理解を深めていくことも大切です．

「人から人へ」．それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません．直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に授業を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう．なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに見ながら授業をしているのですから．

さぁ，そろそろ時間です．まずはしっかりと「予習」し，自分の力を確認しておいてください．いつでも，どこでも，何度でも．『スタディサプリ』は君たちと共にあります．

山内　恵介

高３　ハイレベル数学ⅠＡⅡＢ　テキスト

＜前期　目次＞

第１講　２次方程式・２次関数⑴

第２講　２次方程式・２次関数⑵

第３講　場合の数・確率⑴

第４講　場合の数・確率⑵

第５講　場合の数・確率⑶

第６講　場合の数・確率⑷

第７講　三角比・平面図形

第８講　三角関数⑴

第９講　三角関数⑵

第10講　指数関数・対数関数

第11講　図形と方程式⑴

第12講　図形と方程式⑵

第13講　図形と方程式⑶

第14講　図形と方程式⑷

第15講　微分法・積分法⑴

第16講　微分法・積分法⑵

第17講　微分法・積分法⑶

第18講　微分法・積分法⑷

第19講　ベクトル⑴

第20講　ベクトル⑵

第21講　ベクトル⑶

第22講　ベクトル⑷

第23講　数列⑴

第24講　数列⑵

（以下，後期に続く）

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」3問で構成されています．まずは何も見ないで問題をノート等に解いてみましょう．自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります．

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません．最後まで解けないことも多いかもしれません．それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう．

ちなみに1問にかけてよい時間はおよそ15分〜20分（[1][2]に分かれている場合はそれぞれおよそ10分）です．3問でおよそ1時間．数学に本気で向き合う時間です．

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押えられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です．それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください．問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（＜ Note ＞欄）がふんだんに用意されています．ここには何でも「自由」に書いて残すことができます．「自由」とはどういうことか．それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです．授業時間は限られていますから，先生はすべてを黒板に書くことはしていません．よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです．きれいにまとめても誰も見てくれませんよ．あくまで「Note」＝「記録」です．後から見て自分だけがわかる程度でいいのです．

ちなみにこれまでの人生で書く速度を向上させる努力をしてこなかった人へ．この講座はいつでも止めたり戻ったりできます．けれども，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありませんよ．ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に禁物です．あなた方に残された時間は限られています．勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事ですよ．

③　復習について　その1

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題を見ながらもう一度頭に描いてみましょう．もし思い出せない場面があったら＜ Note ＞欄を見てみましょう．そしてそこで描いた世界観を基に，次に自分で実際に問題を別の紙や復習用ノートに解いてみましょう．予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう．もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします．

もちろん数学という教科の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません．また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません．安心してください．すべての問題に「解答」がついています．必要に応じて参考にしてください．

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です．こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう．

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います．そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします．チャンスは「空き時間」「隙間時間」です．一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります．それを実感することも成長の糧となりましょう．

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう．「練習問題」が各講１題ずつ用意してあります．講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります．また問題によって難易度もさまざまです．

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう．この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です．より理解を深めていただきたく思います．

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に近づくことができます．入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります．授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう．また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも．それを防ぐためにこのサイクルが大切です．もちろん，授業は何度でも再生可能です．後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします．決して短くはないこの道のり．１日１日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう．

最後に．この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です．例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります．特に「詳細な解答」，つまり答えに行き着く「プロセス」を自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません．よって「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません．自分で考えれば必ず答にたどり着く！と主張する先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう．受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です．

よい道筋を参考に，自分で切り拓く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう．

第１講　２次方程式・２次関数(1)

1　a を実数の定数とする．2 つの関数 $f(x)=x^2-(a-2)x+2,\ g(x)=-x^2+2x+a-2$ について，以下の各問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x に対して，$f(x)>g(x)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(2)　すべての実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

2　関数 $f(x)=(2-x)|x+1|$ に対して，$t \leqq x \leqq t+1$ における $f(x)$ の最大値を $g(t)$ とおく．

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　最大値 $g(t)$ を与える x の値が 2 つあるときの t の値を求めよ．

(3)　$g(t)=f(t)$ を満たす t の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

3　x は正の実数とし，$x^2+4x-1=0$ を満たす．

$A=1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3$，$B=(1+x)^3$ とおくとき，$\dfrac{A}{B}$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第1講　2次方程式・2次関数(1)

a を正の定数とする．関数 $f(x)=|x-3a|(x-a)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$a=1$ のとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値は［ア］であり，最小値は $-$［イ］である．

(2)　$0<a\leqq 1$ のとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値は

$0<a\leqq$［ウ］$-\sqrt{［エ］}$ のとき　［オ］a^2-［カ］$a+$［キ］

［ウ］$-\sqrt{［エ］}<a\leqq 1$ のとき　a^2

である．

＜ Note ＞

第２講　２次方程式・２次関数(2)

1　a を実数の定数とする．放物線 $y=x^2-ax+a$ が x 軸の $1\leqq x\leqq 2$ または $3\leqq x\leqq 4$ を満たす部分と 2 つの異なる共有点をもつための a の条件を求めよ．

＜ Note ＞

2 以下の条件を満たす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ.

(1) $x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数 y が存在する.

(2) $x^2+xy+y^2=1$ を満たす正の実数 y が存在しない.

(3) すべての実数 y に対して $x^2+xy+y^2>x+y$ が成り立つ.

＜ Note ＞

3　関数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ここで，a，b，c は $a<b<c$ を満たす実数とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，a，b，c，α，β の大小関係を調べよ．

(2)　$(\beta-\alpha)^2$ を a，b，c で表せ．

(3)　$b-a$ と $c-b$ の小さくない方の値を M とする．$\dfrac{\beta-\alpha}{M}$ の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

第２講　２次方程式・２次関数(2)

２次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつような定数 a の範囲は　$a \leqq$ [ア]，[イ] $\leqq a$ である．

$f(x)=2x^2-2ax+a$ とおくと，

$a \leqq$ [ア] のとき　$f(0)=$ [ウ] $\leqq 0$　　[イ] $\leqq a$ のとき　軸 $x=\dfrac{[エ]}{[オ]} \geqq 1$

である．よって $f(x)=0$ が実数解をもつとき，少なくとも１つの解は０以上になる．

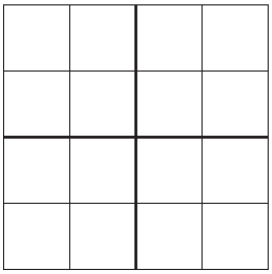
(2)　この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ に少なくとも１つの実数解をもつような定数 a の範囲は

$a \leqq$ [カ]，$\dfrac{[キ]}{[ク]} < a$　である．

＜ Note ＞

第3講　場合の数・確率(1)

1　右図のように，4 行 4 列の 16 個のマス目をつくり，さらに太線でそれぞれ 2 行 2 列からなる 4 つの区画に分ける．それぞれのマス目に 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書き込む．ただし，以下の 3 つの条件をすべて満たすものとする．



(i)　各行には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

(ii)　各列には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

(iii)　各区画には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

数字の書き込み方は全部で何通りあるか．

＜ Note ＞

2　数字 1，2，3 を使ってできる次のような整数の個数を求めよ．ただし，同じ数字を重複して使ってよいものとする．

(1)　5 桁の整数

(2)　5 桁の整数で 2 の倍数

(3)　5 桁の整数で 3 の倍数

(4)　5 桁の整数で 4 の倍数

(5)　5 桁の整数で 6 の倍数

< Note >

3 [1]　－，1，2，3 の符号や数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがあり，これを並べて数をつくる．ただし，－ が最後になる並べ方は除くものとし，数は計算した結果で考える．たとえば，1－23 という並べ方は －22 という数であると考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　このような並べ方は全部で何通りあるか．また，できた数の中で最小のもの，最大のものは何か．

(2)　できた数すべての合計を求めよ．

[2]　空間において座標 $(x,\ y,\ z)$ にある点 P を 1 回の操作で $(x+1,\ y,\ z)$，$(x,\ y+1,\ z)$，$(x,\ y,\ z+1)$ のいずれかを選んでその座標に移動させる．最初に $(0,\ 0,\ 0)$ にある点 P を，9 回の操作で $(3,\ 3,\ 3)$ に移動させる選び方のうち，$(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 3,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 3)$，$(0,\ 3,\ 3)$ のいずれも経由しないものは何通りあるか求めよ．

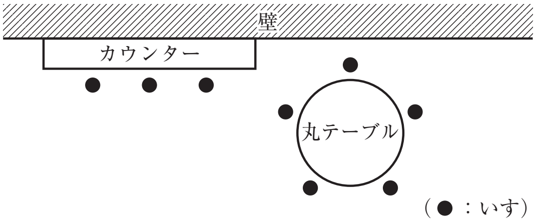
＜ Note ＞

第3講　場合の数・確率(1)

1，2，3，4，5の5種類の数字を，同じ数字を繰り返し用いることを許して3桁の整数をつくるとき，できる3桁の整数は全部で **アイウ** 個ある．そのうち，3の倍数となるものの個数を求めたい．1，2，3，4，5の各数字を3で割った余りで分類すると，余りが0になる数は **エ** 個，余りが1になる数は **オ** 個，余りが2になる数は **カ** 個ある．3桁の整数の各位の数字が3で割った余りが0になる数のみで構成されているとき，その整数は **キ** 個あり，余りが1になる数のみ，余りが2になる数のみであるときは，その整数はともに **ク** 個ずつある．各位の数字が，3で割った余りが0，1，2になる数1つずつで構成されているときも考えると，3の倍数となるものは全部で **ケコ** 個ある．

< Note >

第４講　場合の数・確率(2)



1　あなたと友人合わせて８人でレストランに行き，最大５人まで着席できる壁際のカウンター（片側のみ横１列に着席できる長テーブル）１つと，最大６人まで円形に着席できる丸テーブル１つに分かれて着席することにした．ただし，カウンターと丸テーブルそれぞれの最大着席可能人数を超えないように人数を配分し，それぞれのテーブルを着席人数で等分するようにいすを配置するものとする．例えば，カウンターに３人，丸テーブルに５人着席するときのいすの配置は上図のようになる．

(1)　カウンターに着席するグループと，丸テーブルに着席するグループへの分け方について考える．カウンターに着席する人数が２人であるようなグループ分けの方法は何通りあるか．また，グループ分けの方法は全部で何通りあるか．

(2)　全員の着席位置について考える．ただし丸テーブルについては，回転して重ね合わせることができる配置は同じものとみなす．カウンターに着席する人数が２人であるような着席位置は何通りあるか．また，着席位置は全部で何通りあるか．

(3)　あなたがカウンターの一番左のいすに着席する場合は何通りあるか．

＜ Note ＞

2　赤球 7 個と白球 5 個を A，B，C の 3 つの箱に入れる．

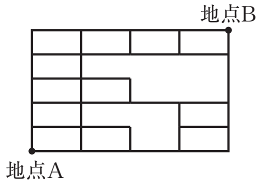
(1)　赤球 7 個だけを 3 つの箱に入れるとき，入れ方は何通りあるか．ただし，球が入らない箱があってもよいものとする．

(2)　赤球 7 個と白球 5 個を 3 つの箱に入れるとき，入れ方は何通りあるか．ただし，球が入らない箱があってもよいものとする．

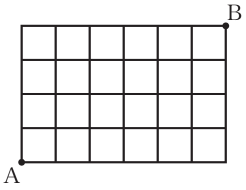
(3)　どの箱にも 1 個以上の球を入れるとき，赤球 7 個と白球 5 個を 3 つの箱へ入れるような入れ方は何通りあるか．

＜ Note ＞

3 ［1］　右図において，地点 A から地点 B への最短経路の総数を求めよ．



［2］　右のような道路の図において，最も小さい正方形の 1 辺の長さは 1 m であるとする．



⑴　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，その経路に含まれる最も長い直線路の長さが 5 m 以上であるものは何通りあるかを求めよ．

⑵　A 地点から B 地点まで最短距離で行く経路のうち，その経路に含まれる最も長い直線路の長さが 4 m 以上であるものは何通りあるかを求めよ．

＜ Note ＞

第4講　場合の数・確率(2)

[1]　8名のクラスのうち，3名が男子学生，5名が女子学生とする．グループ研究を課すことになり，クラスを3つのグループに分けるとする．ただし，それぞれのグループの人数は2人以上，4人以下とする．

(1)　学生の性別に関係なくグループ分けをする方法は **アイウ** 通りある．

(2)　男子学生のみ，あるいは女子学生のみで構成されるグループを含まないグループ分けの方法は **エオカ** 通りある．

[2]　7本の異なる映画を4回上映する場合を考える．ただし，1回の上映に1本の映画を上映し，上映する順番は区別しないこととする．

(1)　同じ映画が複数回上映されない場合，上映する場合の数は **キク** 通りある．

(2)　同じ映画を複数回上映してもよい場合，上映する場合の数は **ケコサ** 通りある．

< Note >

第５講　場合の数・確率(3)

1　3 個のさいころを同時に投げる.

(1)　出る目の最小値が 3 以上になる確率を求めよ.

(2)　3 個のうち，いずれか 2 個の目の和が 8 になる確率を求めよ.

(3)　出る目の最小値が 2 以下になり，かつどの 2 個の目の和も 8 でない確率を求めよ.

< Note >

2 (1) 袋の中に赤玉1個と白玉2個が入っている．この袋から中を見ないで玉を1個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に赤玉が取り出される確率 P_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ を求めよ．

(2) 袋の中に赤玉2個と白玉 n 個が入っている．この袋から中を見ないで玉を1個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に2個目の赤玉が取り出される確率 Q_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n+2)$ を求めよ．

< Note >

3　3人でじゃんけんをし，勝者が1人になるまで繰り返す．ただし，ある回のじゃんけんで負けた者は，その次以降の回では参加できないものとする．

(1)　1回のじゃんけんの後，3人が勝ち残っている確率，および，2人が勝ち残っている確率をそれぞれ求めよ．

(2)　ちょうど3回でじゃんけんが終わる確率を求めよ．

(3)　じゃんけんが n 回以下で終わる確率を求めよ．

＜ Note ＞

第５講　場合の数・確率(3)

n を 3 以上の整数とする．1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする．取り出した札はもとに戻さないものとして，次の問いに答えよ．ただし，$\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする．

(1)　$2n$ 枚の札をすべて区別すると，3 回分の札の取り出し方は全部で

$\boxed{\text{ア}}\,n(\boxed{\text{イ}}\,n-\boxed{\text{ウ}})(n-\boxed{\text{エ}})$ 通りある．

(2)　$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めたい．

X_1，X_2，X_3 はすべて異なるので，X_1，X_2，X_3 の番号の決め方は

$\dfrac{n(n-\boxed{\text{オ}})(n-\boxed{\text{カ}})}{\boxed{\text{キ}}}$ 通りあり，小さい順に X_1，X_2，X_3 の番号と決まる．同じ番号の札が 2 枚ずつあることを考慮すると，$X_1<X_2<X_3$ となる確率は

$\dfrac{n-\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}(\boxed{\text{コ}}\,n-\boxed{\text{サ}})}$ である．

＜ Note ＞

第６講　場合の数・確率(4)

1　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する．ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする．座標平面における領域を $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とし，D 上を動く点 Q を考える．Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む．なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする．

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ．

(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ．

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ．

＜ Note ＞

2　ＡとＢの２チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す．各試合でＡが勝つ確率を p，Ｂが勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．ＡがＢより先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1) P_2 を p と q で表せ．

(2) P_3 を p と q で表せ．

(3) P_4 を p と q で表せ．

(4) $\frac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ．

＜ Note ＞

3 [1]　n を 2 以上の整数とし，袋の中に，白玉が 5 個，赤玉が n 個入っているとする．この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉 1 個ずつである確率を p_n とし，また，取り出した白玉の個数を X とする．

(1)　p_n を求めよ．

(2)　p_n が最大になる n の値と，そのときの p_n の値を求めよ．

(3)　X の期待値が 0.625 になるとき，n の値を求めよ．

[2]　N を 2 以上の自然数とする．1 から N までの番号を 1 つずつ書いた N 枚のカードから 2 枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号を X とし，小さい番号を Y とする．

(1)　i を 1 以上 N 以下の自然数とするとき，$X=i$ となる確率 p_i および $Y=i$ となる確率 q_i を求めよ．

(2)　X の期待値 E_1 および Y の期待値 E_2 を求めよ．

＜ Note ＞

第6講　場合の数・確率(4)

数直線上の点Pは，原点Oを出発して，次のルールに従って移動するとする．

「1つのさいころを振り，3以下の目が出たときには正の方向に1，5以上の目が出たときには負の方向に1，それぞれ動く．また，4の目が出たときは動かない．点Pの座標が -1 になったら，さいころを振るのをやめ，点Pはそこにとどまる．それ以外のときは，さいころをまた振る．」

さいころを多くとも3回まで振り，移動を終えた後の点Pの座標を X とする．$X=-1$ となる移動の方法は [ア] 通りあり，確率は $\dfrac{\boxed{イウ}}{\boxed{エオカ}}$ である．$X=1$ となる移動の方法は [キ] 通りあり，確率は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ である．よって，X の期待値 $E(X)$ は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセソ}}$ である．

＜ Note ＞

第７講　三角比・平面図形

1　四角形 ABCD において AB＝CD＝1，BC＝DA＝3 であり，対角線 AC，BD の長さをそれぞれ x，y とする．

(1)　四角形 ABCD の面積 S を x を用いて表せ．また，S の最大値 S_0 を求めよ．

(2)　面積が $\frac{1}{3}S_0$ である四角形 ABCD に対して x^2，y^2 の値を求めよ．ただし，$x \leqq y$ とし，S_0 は(1)で求めたものとする．

(3)　$\cos\angle\mathrm{ACB}$ を x で表せ．また，$\angle\mathrm{ACB}$ が最大となる x の値を求めよ．

＜ Note ＞

2 円周上に4点A，B，C，Dが反時計回りに並んでいる．直線ABと直線DCの交点をE，線分ACとBDの交点をFとする．AB＝1，BE＝3，AE＝4であり，△DCFの面積は△ABFの面積の4倍である．

FA＝x，FB＝y，CE＝t，$\dfrac{y}{x}$＝uとおいて，以下の問いに答えよ．

(1) FC，FDをx，yで表せ．

(2) tの値を求めよ．

(3) uの値を求めよ．

(4) 面積の比の値$\dfrac{\triangle \mathrm{AED}}{\triangle \mathrm{ABF}}$を求めよ．

＜ Note ＞

3　△ABC は，$\tan A=\frac{4}{3}$，BC＝6 を満たしているものとする．ただし，$A=\angle \mathrm{BAC}$ とする．

(1)　$\sin A$ および $\cos A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　△ABC の外接円の半径を求めよ．

(3)　△ABC の面積の最大値と，そのときの辺 AB の長さを求めよ．

< Note >

第7講　三角比・平面図形

点Oを中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる3点A，B，Pがある．弦ABの長さを $\sqrt{3}\,a$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1)　点Pが直線ABに関して点Oと同じ側にあるとき，$\angle\mathrm{APB}=$ アイ °である．

(2)　点Pが円 C の周上を動くとき，△PABの面積は $\mathrm{PA}=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,a$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる．

＜ Note ＞

第８講　三角関数(1)

1 [1]　$\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$，$\sin 4$ を小さい順に並べよ．ただし，角度は弧度法（ラジアン）である．

[2]　$\alpha+\beta=\dfrac{4}{3}\pi$　……①，$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　……②　のとき $\cos\alpha+\cos\beta$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

2　以下の ア ～ エ にあてはまる数字をそれぞれ答えよ．

［1］ 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が媒介変数 θ を用いて

$$x=-\sin\theta+2\cos\theta,\ \ y=2\sin\theta+3\cos\theta$$

と表されているとする．このとき，原点をOとすると

$$\mathrm{OP}^2=\boxed{\text{ア}}\sqrt{2}\sin\left(\boxed{\text{イ}}\theta+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)+\boxed{\text{エ}}$$ が成り立つ．

［2］ $\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\left(\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|\right)$ であるから，

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のときは

$$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$ である．

＜ Note ＞

3 $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，次の方程式を解け.

$$\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$$

< Note >

第8講　三角関数(1)

(1)　θ の関数 $\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ を，定数 a，b を用いて $a\sin^3\theta+b\sin\theta$ と表したとき，$(a,\ b)=\left(\boxed{\text{ア}},\ -\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$ である．

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とするとき，方程式 $1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$ の解は $\theta=\pm\dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}$，$\pm\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ である．（ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$ とする．）

＜ Note ＞

第9講　三角関数(2)

1　a を実数とする．方程式 $\cos^2 x - 2a\sin x - a + 3 = 0$ の解で $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲にあるものの個数を求めよ．

＜ Note ＞

[2] 長さ1の線分ABを直径とする円周上の点をPとするとき，次の問いに答えよ．ただし，Pは点A，Bとは異なるものとする．

(1) $\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とするとき，線分AP，BPの長さを θ を用いて表せ．

(2) PからABに下ろした垂線とABとの交点をCとする．△APCと△BPCの周の長さの和 L を θ を用いて表せ．

(3) L の最大値を求め，そのときの θ の値を求めよ．

＜ Note ＞

3　座標平面上の 3 本の直線 $x=0$，$y=0$ および $x+2y=8$ で囲まれた三角形の周上において，

$$z=\sin\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi y}{4}+\cos\frac{\pi(x+2y)}{8}$$

の最大値，最小値と，それを与える x，y の値をそれぞれ求めよ．

＜ Note ＞

第9講　三角関数(2)

座標平面上で3点 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$, $(0,\ \pi)$ を頂点とする三角形を考える．点 $(x,\ y)$ がこの三角形の辺上を動くとき，$\sin x\cos y+\cos(x+y)$ は

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi,\ \boxed{ウ}\right)\text{ のとき最大値 }\sqrt{\boxed{エ}}\text{ をとり}$$

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi,\ \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi\right)\text{ のとき最小値 }-\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\text{ をとる．}$$

＜ Note ＞

第10講　指数関数・対数関数

1 ［1］ a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

［2］ 等式 $\log_3 x - \dfrac{1}{\log_9 x} = (-1)^x$ を満たす正の整数 x の値を求めよ．

＜ Note ＞

2　p を実数の定数として，実数 x の関数を $f(x)=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2p\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}-1\right)+7$ とする．$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ とおき，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく．

(1)　関数 $g(t)$ を求めよ．

(2)　方程式 $g(t)=0$ が実数解をただ１つもつとき，p の値と解 t の値を求めよ．

(3)　方程式 $g(t)=0$ が次の条件を満たす２個の実数解 t_1，t_2 をもつとき，p がとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ．

(i)　$t_1<2$，$t_2>2$　　(ii)　$t_1=2$，$t_2>2$　　(iii)　$2<t_1<t_2$

(4)　t を定数とみなし，$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ を x の方程式とみなして，この方程式が異なる２つの実数解 x をもつように t の値を定めるとき，t がとり得る値の範囲を求めよ．

(5)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解 x の個数を，p の値で場合分けして求めよ．

＜ Note ＞

3 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 2^n が 10 桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

(2) 2^n+3^n が 10 桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

＜ Note ＞

第10講　指数関数・対数関数

正の数 x が，$2\cdot 9^x+3^x-3^{-x}+2\cdot 9^{-x}=10$ を満たすとする．$t=3^x-3^{-x}$ とおくと，t は 2 次方程式 $\boxed{\text{ア}}\,t^2+t-\boxed{\text{イ}}=0$ の解である．したがって，$t=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．また，$9^x-9^{-x}=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

＜ Note ＞

第11講　図形と方程式(1)

1　a を実数とする．関数 $y=|x-1|+|x-2|$ と関数 $y=x+a$ のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とおく．G_1 と G_2 が交点をもつとする．

(1)　G_1 のグラフをかけ.

(2)　G_1 と G_2 の囲む領域が三角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，三角形の面積 S_1 を a を用いて表せ.

(3)　G_1 と G_2 の囲む領域が四角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，四角形の面積 S_2 を a を用いて表せ.

＜ Note ＞

2　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える．また線分 AB 上の点 D を，$\angle \mathrm{ACO}=\angle \mathrm{BCD}$ となるように定める．t の値を変化させたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

3　曲線 $y=x^2-1$ 上を動く点Ｐと，直線 $y=x-3$ 上を動く点Ｑとの距離が最小となるときの点Ｑの座標と，そのときの距離を求めよ．

< Note >

第 11 講　図形と方程式(1)

xy 平面上の 2 つの放物線 $C_1：y=-x^2+4x$，$C_2：y=x^2-2x$ を考える．

(1)　C_1，C_2 の原点とは異なる交点を A，C_2 の頂点を B とし，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ から 2 点 A，B を通る直線 l に下ろした垂線の足を H とする．点 P が直線 l 上にないとき，H の座標を x_1，y_1 を用いて表すと

$$\left(\frac{x_1+\boxed{\text{ア}}\,y_1+\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\boxed{\text{エ}}\,x_1+\boxed{\text{オ}}\,y_1-\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$ である．

(2)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が C_1 上にあるとき，三角形 ABP の面積 S を x_1 を用いて表すと，$S=\left|x_1{}^2-\boxed{\text{キ}}\,x_1-\boxed{\text{ク}}\right|$ である．また点 P が C_1 上を原点から A まで動くとき，S の最大値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

< Note >

第12講　図形と方程式(2)

1 [1]　点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点A(4，1)との距離APの最小値と最大値を求めよ．

[2]　原点Oを中心とする半径2の円に，点P(4，0)から引いた2本の接線の接点のうち，第1象限にある点をA，残りの点をBとする．直線ABが x 軸と交わる点をCとする．Cから直線APに引いた垂線とAPの交点をDとする．

(1)　線分APの長さを求めよ．

(2)　線分CDの長さを求めよ．

(3)　3点P，C，Dを通る円の方程式を求めよ．

＜ Note ＞

2 [1]　k を定数とし，方程式 $x^2+y^2+3kx-ky-10k-20=0$ で表される座標平面内の円 C について，次の各問いに答えよ．

(1)　円 C は k の値によらず，ある2つの定点を通る．この2点の座標を求めよ．

(2)　k が変化するとき，円 C の面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ．

[2]　直線 $l:(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$ が，曲線 $C:x^2+y^2=r^2$ $(r>0,\ x\geqq 0)$ に接する．

(1)　r の値を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$ が直線 l 上の点であるとき，a の値を求めよ．また，点Aから曲線 C に引いた l 以外の接線 m の方程式を求めよ．

(3)　曲線 C と2つの接線 l，m で囲まれた図形の面積を求めよ．

< Note >

3　O を原点とする座標平面上の円 $C：x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方を P，他方を Q とする．点 P，Q における円 C の接線をそれぞれ l，m とする．次の問いに答えよ．

⑴　P，Q の座標を求めよ．また，l と m の交点 R の座標を求めよ．

⑵　線分 OR と C の交点を S とする．S の座標を求めよ．また，△QRS の面積を求めよ．

⑶　∠PQS＝∠RQS であることを示せ．

＜ Note ＞

第12講　図形と方程式(2)

直線 $x+2y=9$ との距離が最小となる円 $x^2+y^2=4$ 上の点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}},\ \dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}\right)$ であり，そのときの距離は

$\dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}$ である．

＜ Note ＞

第 13 講　図形と方程式(3)

1 ［1］　一辺の長さが $2s$ である正三角形 ABC の 3 つの頂点を $\mathrm{A}(-s,\ 0)$，$\mathrm{B}(s,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3}s)$ とする．$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=t$ であるような点 P について，以下の問いに答えよ．

(1)　このような点 P が存在するための実数 s，t についての必要十分条件と，この条件の下での点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(2)　点 P の軌跡が頂点 A を通る場合の s と t の関係式を求めよ．また，このときの点 P の軌跡を △ABC とともに図示せよ．

［2］　実数 a と b が $a+b=4$ を満たしながら変化する．このとき，放物線 $y=x^2+2ax+b$ の頂点の軌跡の方程式を求めよ．

< Note >

2　座標平面上の3点 A(0, 0)，B(3, 0)，C(1, 3) に対して

- 線分 BC を $1:k$ に内分する点を D（k は正の実数）
- 2点 A，D を通る直線を l
- 点 C を中心とし直線 l に接する円を S
- 円 S と直線 l の接点を P

とする．

(1) 点 D の座標，直線 l の方程式，円 S の半径 r の値を，それぞれ k を用いて表せ．

(2) k がすべての正の値をとって変化するとき，円 S の半径 r がとり得る値の範囲を求めよ．

(3) k がすべての正の値をとって変化するとき，点 P が描く軌跡の方程式とその範囲を求めよ．

< Note >

3　３点 P(4，−5)，Q(0，3)，R(7，4) を通る円を C とする．

(1)　円 C の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$　とおいて，a，b，c の値を求めよ．

(2)　点 S(−4，0) を通り，傾き m の直線を l とする．直線 l が円 C と２つの交点をもつような傾き m の範囲を求めよ．

(3)　傾き m が(2)の範囲にあるとき，直線 l と円 C の２つの交点の中点の軌跡はある円の一部分であることを示し，その軌跡を求めよ．

＜ Note ＞

第13講　図形と方程式(3)

座標平面上の点 A$(-3,\ 1)$ を通る直線 l_1 と点 B$(0,\ 3)$ を通る直線 l_2 が常に直交しながら変化するとき，l_1 と l_2 の交点が描く軌跡は，

円 $\left(x+\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^2+(y-\boxed{\text{ウ}})^2=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．また，この円上の点と原点 O との

距離の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

＜ Note ＞

第 14 講　図形と方程式(4)

1 [1]　a，b を正の実数とする．実数 x に対し，次の命題が成り立つような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

$$|x-a|<b \implies |x-b|<a$$

[2]　不等式 $x^2+y^2+4x\leqq 0$ の表す領域を A，不等式 $x^2+y^2-2y\leqq 0$ を表す領域を B とする．次の問いに答えよ．

(1)　領域 A の境界線と領域 B の境界線の共有点の座標を求めよ．

(2)　和集合 $A\cup B$ を座標平面上に図示せよ．

(3)　θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ を満たす実数とする．和集合 $A\cup B$ の面積を θ を用いて表せ．

＜ Note ＞

2　次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x^2+y^2 \leqq 25,\ (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0$$

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，M，m を与える D の点を求めよ．

(3)　a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ が点 $(-3,\ 4)$ で最大値をとるような a の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

3　斜辺の長さが a, 面積が b である直角三角形が存在するとき, 座標平面上の点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ.

＜ Note ＞

第14講　図形と方程式(4)

連立不等式 $3x+2y\leqq 22$，$x+4y\leqq 24$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す座標平面上の領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y\ (a>0)$ の最大値は

$0<a\leqq\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき $\boxed{ウ}$　　$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}<a\leqq\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき $\boxed{カ}a+\boxed{キ}$

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}<a$ のとき $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}a$　である．

＜ Note ＞

第 15 講　微分法・積分法(1)

1　a，b を正の実数とする．3 次関数 $f(x)=ax(x-b)^2$ は $f(4)=27$ を満たし，$0<x<4$ において極大値 2 をもつ．a，b の値を求めよ．

＜ Note ＞

2　k を実数とする．3次関数 $f(x)=-x^3+kx^2+kx+1$ が $x=\alpha$ で極小値をとり，$x=\beta$ で極大値をとる．3点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta,\ f(\alpha))$ が $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

(2)　k の値を求めよ．

< Note >

3　x の関数 $f(x)=8^x+8^{-x}-9(4^x+4^{-x})+27(2^x+2^{-x})-26$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3)　t が(2)で求めた範囲を動くとき，関数 $y=g(t)$ の増減を調べよ．

(4)　$x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

＜ Note ＞

第 15 講　微分法・積分法(1)

関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$（a, b は実数の定数）について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲は $a<$ [ア] である．

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるときの a の値を求めたい．2 つの極値をとる x の値を α, β（$\alpha<\beta$）とすると，極大値と極小値の差は $f(\alpha)-f(\beta)=$ [イ] $(\beta-\alpha)(1-a)$ である．また，$\alpha+\beta=$ [ウ]，$\alpha\beta=$ [エ] であり，$\beta-\alpha=2\sqrt{[オ]-a}$ である．以上より $a=-$ [カ] である．これは $a<$ [ア] を満たす．

< Note >

第16講　微分法・積分法(2)

1　a を定数とし，放物線 $y=-(x-a)^2+a+1$ を C とする．

(1)　放物線 $y=x^2$ と C が異なる2点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　a が(1)で求めた範囲にあるとし，$y=x^2$ と C の2つの共有点をP，Qとする．ただし，(Pの x 座標)$<$(Qの x 座標) とする．Pにおける C の接線の傾きを m，Qにおける C の接線の傾きを n とするとき，積 mn を a を用いて表せ．また，mn のとり得る値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

2　2つの放物線 $y=kx^2$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもち，その点における2曲線の接線が直交する．このとき，定数 k の値と共有点の座標を求めよ．

＜ Note ＞

3　3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲線の接線を l_t とする．

(1)　l_t の方程式を求めよ．

(2)　l_t が原点を通るような t の値がただ1つに定まるための a，b の条件を求めよ．

(3)　a，b が(2)の条件を満たすとき，点 $(a,\ b)$ が存在する領域を図示せよ．

＜ Note ＞

第16講　微分法・積分法(2)

［1］　放物線 $y=-x^2$ に点 A$(0,\ a)$ から引いた2本の接線のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ となるとき，

a の値は $a=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

［2］　$a>0$ とする．3次方程式 $x^3-ax+a=0$ がただ1つの実数解をもつとき，a の値の

範囲は $0<a<\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である．

＜ Note ＞

第17講　微分法・積分法(3)

1 [1]　次の定積分を求めよ.　$\displaystyle\int_0^3 |x^2-x-2|dx$

[2]　0以上の実数 t に対し，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|dx$ とする.

(1)　$F(t)$ を t の関数として表せ.

(2)　関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ.

< Note >

2 放物線 $C：y=x(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) 直線 $l：y=ax$ と C との交点で，原点とは異なる点の座標を求めよ．

(2) C と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) C と l とで囲まれた図形 D の面積を求めよ．

(4) 点 $(a,\ 0)$ を通り，図形 D の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ．

< Note >

3　2つの放物線 C_1：$y=x^2+4$，C_2：$y=-x^2+4x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する2本の直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　C_1 と，(1)における l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

＜ Note ＞

第 17 講　微分法・積分法(3)

放物線 $y=x^2-4x+6$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　点 $(3,\ -1)$ からこの放物線に引いた 2 本の接線の方程式は

$y=$ [ア] $x-$ [イウ]，$y=-$ [エ] $x+$ [オ] である．

(2)　(1)で求めた接線と放物線で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

＜ Note ＞

第 18 講　微分法・積分法(4)

1　関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+2x & (x \leqq 2 \text{ のとき}) \\ x-2 & (x>2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されている．次の各問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　$a \leqq x \leqq a+2$ における $f(x)$ の最大値が $f(a+2)$ と等しくなるような実数 a の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

2　定数 a $(a\neq 1)$ に対し，$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解を a を用いて表せ．

(2)　関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

＜ Note ＞

3　関数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt$ の最小値を求めよ.

＜ Note ＞

第 18 講　微分法・積分法(4)

放物線 $y=3x^2-12x$ $(m \leqq x \leqq m+2)$ と 3 直線 $y=0$，$x=m$，$x=m+2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする．ただし，m は定数で $2<m<4$ とする．このとき，S は $m=$ [ア] $+\sqrt{[イ]}$ で最小値 [ウエ] $-$ [オカ] $\sqrt{[キ]}$ をとる．

＜ Note ＞

第19講　ベクトル(1)

1 ［1］　平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ と $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たしている．

(1)　$|\vec{a}|=k$ とするとき，$|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，$|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

［2］　平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=1$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすように動く．
$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値，最小値とそのときの $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

＜ Note ＞

2　座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円があり，その周上に異なる 3 点 A，B，C がある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ のとき，$\angle$ACB の大きさを求めよ．

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ のとき，$\angle$AOB の大きさを求めよ．

(3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ のとき，$|\overrightarrow{AB}|$ の値を求めよ．

(4) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ のとき，$\angle$ACB の大きさと $\triangle$ABC の面積の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

3　鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O，重心を G，線分 AB を 2：1 に内分する点を P とする．$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{5}{6}\pi$，$\mathrm{OA}=1$　であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$　とするとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の値を求めよ．また，三角形 OPG の面積を求めよ．

＜ Note ＞

第 19 講　ベクトル(1)

三角形 ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$ とおく．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ を満たしている．$\vec{c}=$ **ア** $\vec{a}-\vec{b}$ より，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$ とあわせて $|\vec{a}|^2=$ **イ** である．同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ より $|\vec{b}|^2=$ **ウ** である．したがって，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

< Note >

第20講　ベクトル(2)

1　三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB のそれぞれの中点を D，E，F とする．また，p を $0<p<1$ を満たす数として，線分 EF，FD，DE をそれぞれ $p:(1-p)$ に内分する点を G，H，I とする．$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，p を用いて表せ．

(2)　3 点 A，G，H が一直線上にあるときの p の値を求めよ．

(3)　p が(2)で求めた値であるとし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|^2$ を求めよ．

＜ Note ＞

2　三角形 ABC において，3 辺の長さは $\mathrm{AB}=2a+1$，$\mathrm{BC}=2a$，$\mathrm{CA}=a$ であり，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{11}{24}$ である．ただし，$a>0$ とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2)　辺 AB を 1：3 に内分する点を Q，辺 CA の垂直二等分線と線分 CQ，辺 CA との交点をそれぞれ P，R とおく．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

＜ Note ＞

3　平面上の3点A，B，Cは同一直線上にないものとし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$ とする．また，t を正の実数とし，平面上の点Pを $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と定め，線分APとBCの交点をQとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を t および $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2)　三角形ABPの面積を t と内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ かつ点Qが線分BCを1：2に内分するとき，三角形BPQの面積を求めよ．

＜ Note ＞

第20講　ベクトル(2)

平面上に三角形OABがあり，3辺の長さはAB＝5，OA＝6，OB＝7であるとする．この三角形OABと正の数 t に対して，$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{OB}$ を満たす点Pをとる．

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ **アイ** である．

(2) t が正の数全体を動くとき，$|\overrightarrow{OP}|$ が最小値をとるような t の値を t_0 とし，$t=t_0$ のときの点Pを P_0 とすれば，$t_0=\dfrac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$，$|\overrightarrow{OP_0}|=$ **カキ** である．さらに，点 P_0 から直線OAに下ろした垂線を P_0H とすれば $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}\overrightarrow{OA}$ である．

＜ Note ＞

第21講　ベクトル(3)

1　平面上に互いに異なる3点O，A，Bがあり，それらは同一直線上にはないものとする．OA＝2，OB＝3とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく．∠AOBの二等分線と線分ABとの交点をCとし，直線OAに関して点Bと対称な点をDとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，∠AOBと線分OCの長さを求めよ．

＜ Note ＞

2　△ABC において，AB＝3，AC＝5，BC＝$2\sqrt{6}$ とする．△ABC の外心を O とし，O から辺 AB に下ろした垂線と AB の交点を M，O から辺 AC に下ろした垂線と AC の交点を N，直線 AO と辺 BC の交点を D とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|$ の値を求めよ．

(3)　BD：DC＝s：$(1-s)$　$(0<s<1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　(k は実数) とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NO}}$ をそれぞれ k，s，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

< Note >

3　△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$　とする．また，△OAB の面積を S とする．

(1)　$1 \leqq s+t \leqq 3$ のとき，点 P の存在し得る領域の面積を S を用いて表せ.

(2)　$1 \leqq s+2t \leqq 3$ のとき，点 P の存在し得る領域の面積を S を用いて表せ.

＜ Note ＞

第21講　ベクトル(3)

三角形OABについて，$OA=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{3}$，$AB=2$とする．点Oから辺ABに垂線を下ろしたときの交点をL，辺OBに関してLと対称な点をPとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおく．

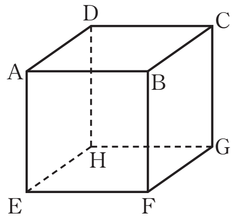
(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$である．また，$\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{エ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{b}\right)$である．

(2)　$\overrightarrow{OP}=-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\vec{b}$である．

＜ Note ＞

第22講　ベクトル(4)

1　図のような1辺の長さを1とする立方体ABCD-EFGHを考える．線分AHと線分EDの交点をKとする．さらに，辺CGを3：1に内分する点をLとし，辺EFを$p:(1-p)$に内分する点をMとする．ただし，$0<p<1$である．また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{EA}}$とおく．



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$および$\overrightarrow{\mathrm{KM}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$と$\overrightarrow{\mathrm{KM}}$が垂直になるような$p$の値を求めよ．

(3)　直線KLと面EFGHを含む平面との交点をQとする．

　(i)　線分EQの長さを求めよ．

　(ii)　△EKQの面積を求めよ．

＜ Note ＞

2 座標空間内で，原点 O，A(1，0，0)，B(b_1，b_2，0)，C(c_1，c_2，c_3) を頂点とする正四面体を考える．ただし，b_2 と c_3 は正とする．

(1) b_1，b_2 および c_1，c_2，c_3 を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

(3) P は直線 BC 上の点で，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

＜ Note ＞

3 座標空間内において，2点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 1)を端点とする線分OA，平面 $z=2$ 上に点 (0, 0, 2) を中心とする半径1の円周 C，および C 上の動点Pがあるとする．

(1) 直線PAと xy 平面との交点をA′とするとき，A′の軌跡の方程式を求めよ．

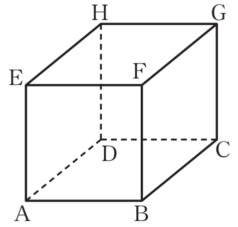
(2) 線分OA′が動いてできる xy 平面上の図形を描け．

(3) (2)の図形の面積を求めよ．

＜ Note ＞

第22講　ベクトル(4)

右の立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さは1である．線分 AH の中点を P，線分 HC を $1:2$ に内分する点を Q とする．また，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく．



(1)　$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}\vec{a}+\dfrac{1}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{ウ}}\vec{c}$ である．

(2)　線分 CG を $3:1$ に内分する点を R とする．線分 BR 上に点 S を，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{DS}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{DS}=\vec{a}-\dfrac{11}{\boxed{エオ}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{カ}}\vec{c}$ である．

(3)　次に，点 B，C，G，F を含む平面上に点 T を，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{DT}$ が垂直になるようにとる．線分 DT の長さは $\overrightarrow{DT}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{キ}}{5}\vec{b}-\dfrac{\boxed{ク}}{5}\vec{c}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$ をとる．

＜ Note ＞

第23講　数列(1)

1　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 b，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ があり，数列 $\{c_n\}$ は $c_n=a_n+b_n$ により定まる数列とする．a，b，d，r がすべて正の整数で，$c_1=4$，$c_2=9$，$c_3=17$ のとき，以下の設問に答えよ．

(1)　a，b，d，r の値を求めよ．

(2)　数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．

＜ Note ＞

2　a，b，c は相異なる実数で，$abc=-27$ を満たしている．さらに，a，b，c はこの順で等比数列であり，a，b，c の順序を適当に変えると等差数列になる．このとき，a，b，c の値を求めよ．

＜ Note ＞

3　数列 $\{a_n\}$ を初項 3，公比 3 の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 11，公差 8 の等差数列とする．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を小さいものから順に並べて得られる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

第23講　数列(1)

等差数列 2, 5, 8, …… を $\{a_n\}$, 等比数列 2, 4, 8, …… を $\{b_n\}$ とし, $\{b_n\}$ の項のうち $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ をつくるとき, 次の問いに答えよ.

(1)　$a_n=$ [ア] $n-$ [イ], $b_n=$ [ウ]^n である.

(2)　$a_l=b_m$ が成り立つとすると, [ア] $l-$ [イ] $=$ [ウ]^m である.

ここで [ウ]$^{m+1}$, [ウ]$^{m+2}$ を考えることにより, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通項は公比 [エ] の等比数列であることがわかり, その初項は [オ] である. したがって, 数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=$ [カ]$^{2n-\text{キ}}$ である.

＜ Note ＞

第 24 講　数列(2)

1 [1] $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)$ を求めよ.

[2] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}$ を求めよ.

＜ Note ＞

2 ［1］ 数列 1，1＋3＋1，1＋3＋9＋3＋1，1＋3＋9＋27＋9＋3＋1，……
の第 n 項から第 $2n$ 項までの和を求めよ．ただし，n は自然数とする．

［2］ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$\log_{10}(S_n+1)=n$ が成り立っているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

3 n を正の整数，r を 0 および 1 でない実数とし，$S=\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$，$T=\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$，$U=\sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) S を記号 $\sum$ を用いずに r，n で表せ．

(2) T を記号 $\sum$ を用いずに S，r，n で表せ．ただし，S を必ず用いること．

(3) U を記号 $\sum$ を用いずに S，T，r，n で表せ．ただし，S と T を必ず用いること．

＜ Note ＞

第24講　数列(2)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3n^3+6n^2+n$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）であるとき，一般項は $a_n=\boxed{\text{ア}}n^2+\boxed{\text{イ}}n-\boxed{\text{ウ}}$ である．さらに，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}\left(\frac{1}{3n-\boxed{\text{オ}}}-\frac{1}{3n+\boxed{\text{カ}}}\right),\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である．

＜ Note ＞

テキスト解答

第1講　2次方程式・2次関数(1)

1　a を実数の定数とする．2つの関数 $f(x)=x^2-(a-2)x+2$, $g(x)=-x^2+2x+a-2$ について，以下の各問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x に対して，$f(x)>g(x)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(2)　すべての実数 x_1，x_2 に対して，$f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)>g(x)$ より

$$x^2-(a-2)x+2>-x^2+2x+a-2$$

$$2x^2-ax+4-a>0$$

これがすべての実数 x で成り立つのは　判別式　$D=a^2-8(4-a)<0$　のとき

$a^2+8a-32<0$　　したがって　$\boldsymbol{-4-4\sqrt{3}<a<-4+4\sqrt{3}}$

(2)　すべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つのは，

〔$f(x)$ の最小値〕>〔$g(x)$ の最大値〕　であるとき．

$f(x)=\left(x-\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{(a-2)^2}{4}+2$　より　$f(x)$ の最小値は　$-\dfrac{(a-2)^2}{4}+2$

$g(x)=-(x-1)^2+a-1$　より　$g(x)$ の最大値は　$a-1$

よって　$-\dfrac{(a-2)^2}{4}+2>a-1$　　$-(a^2-4a+4)+8>4a-4$　　$a^2<8$

したがって　$\boldsymbol{-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}}$

2　関数 $f(x)=(2-x)|x+1|$ に対して，$t\leqq x\leqq t+1$ における $f(x)$ の最大値を $g(t)$ とおく．

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

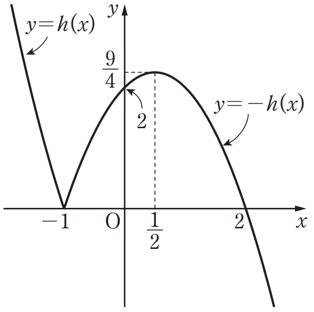
(2)　最大値 $g(t)$ を与える x の値が2つあるときの t の値を求めよ．

(3)　$g(t)=f(t)$ を満たす t の値の範囲を求めよ．

(1)　$f(x)=(2-x)|x+1|$

$$=\begin{cases} -(x-2)(x+1) & (x\geqq -1) \\ (x-2)(x+1) & (x\leqq -1) \end{cases}$$

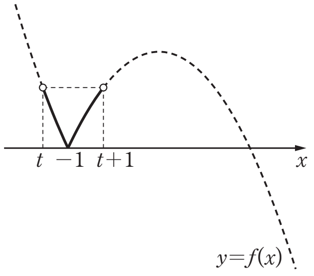
$h(x)=(x-2)(x+1)$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは右図．



(2)　変域の幅が１であることより，(1)のグラフから

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ が最大値のとき $\left(t \leqq \frac{1}{2} \leqq t+1 \text{ のとき}\right)$ に，$t \leqq x \leqq t+1$ で

$x=\frac{1}{2}$ のほかに最大値をとる x の値は存在しない．



よって，題意を満たすのは

$t<-1<t+1$　……①　かつ　$f(t)=f(t+1)$　……②

のときである．

①より　$-2<t<-1$

②より　$h(t)=-h(t+1)$　　$(t-2)(t+1)=-(t-1)(t+2)$

$t^2=2$　　$t=\pm\sqrt{2}$

①かつ②より　$\boldsymbol{t=-\sqrt{2}}$

(3)　$y=f(x)$ の $t \leqq x \leqq t+1$ における最大値 $g(t)$ が $f(t)$，つまり変域におけるグラフの左端の値が最大値となるのは，(1)のグラフおよび(2)の結果より　$\boldsymbol{t \leqq -\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq t}$　のときである．

> **3**　x は正の実数とし，$x^2+4x-1=0$ を満たす．
> $A=1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3$，$B=(1+x)^3$ とおくとき，$\frac{A}{B}$ の値を求めよ．

$1+x=X$ とおくと，$x=X-1$　　$x>0$ より　$X>1$

このとき　$x^2+4x-1=0$ より

$(X-1)^2+4(X-1)-1=0$　　$X^2+2X-4=0$　　$X=-1+\sqrt{5}$

$A=1+X+X^2+X^3=(X^2+2X-4)(X-1)+7X-3=7X-3$

$B=X^3=(X^2+2X-4)(X-2)+8X-8=8X-8$

よって

$$\frac{A}{B}=\frac{7X-3}{8X-8}=\frac{1}{8}\left(\frac{7X-3}{X-1}\right)=\frac{1}{8}\left(7+\frac{4}{X-1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(7+\frac{4}{\sqrt{5}-2}\right)=\frac{1}{8}\{7+4(\sqrt{5}+2)\}=\boldsymbol{\frac{15+4\sqrt{5}}{8}}$$

第２講　２次方程式・２次関数(2)

1　a を実数の定数とする．放物線 $y=x^2-ax+a$ が x 軸の $1\leqq x\leqq 2$ または $3\leqq x\leqq 4$ を満たす部分と２つの異なる共有点をもつための a の条件を求めよ．

$f(x)=x^2-ax+a$ とおくと　軸：$x=\dfrac{a}{2}$　グラフは下に凸の放物線．

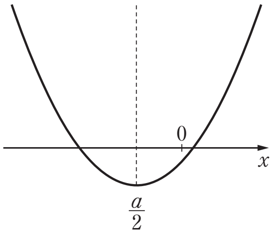
$f(1)=1>0$

$f(2)=4-a$　　$f(3)=9-2a$　　$f(4)=16-3a$

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わるためには，

判別式　$D=a^2-4a>0$

$a(a-4)>0$　ゆえに　$a<0,\ 4<a$　であることが必要．

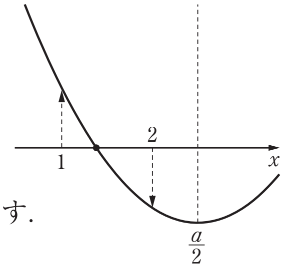


(i)　$a<0$ のとき　軸：$x=\dfrac{a}{2}<0$

よって，x 軸と $x<0$ の範囲に交点をもち，題意を満たさず不適．

(ii)　$4<a$ のとき

軸：$x=\dfrac{a}{2}>2$　　$f(2)=4-a<0$



よって，$1\leqq x\leqq 2$ において x 軸とただ１つの交点をもつ．

したがって，題意を満たすのは

$f(3)=9-2a\leqq 0$　かつ　$f(4)=16-3a\geqq 0$　のときである．

$\dfrac{9}{2}\leqq a$　かつ　$a\leqq\dfrac{16}{3}$　より　$\dfrac{9}{2}\leqq a\leqq\dfrac{16}{3}$　これは $4<a$ を満たす．

(i)，(ii)より，求める a の条件は　$\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\leqq a\leqq\dfrac{16}{3}}$

2　以下の条件を満たす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数 y が存在する．

(2)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たす正の実数 y が存在しない．

(3)　すべての実数 y に対して $x^2+xy+y^2>x+y$ が成り立つ．

(1)　$x^2+xy+y^2=1$　より　$y^2+xy+x^2-1=0$

これを満たす実数 y が存在するのは

判別式　$D_1=x^2-4(x^2-1)\geqq 0$　のとき

$x^2\leqq\dfrac{4}{3}$　　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

(2)　$f(y)=y^2+xy+x^2-1=\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2-1$ とおくと　軸：$y=-\frac{x}{2}$

$f(y)=0$ を満たす正の実数 y が存在しないのは

(i)　実数解が存在しない　　(ii)　実数解が $y\leqq 0$ にのみ存在する

のいずれかである．

(i)のとき　(1)より　$x<-\frac{2}{\sqrt{3}}$，$\frac{2}{\sqrt{3}}<x$

(ii)のとき　軸 $y=-\frac{x}{2}\leqq 0$　より　$x\geqq 0$

$f(0)=x^2-1\geqq 0$　より　$x\leqq -1$，$1\leqq x$

$D_1\geqq 0$　より　$-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$1\leqq x\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{x<-\frac{2}{\sqrt{3}}}$，$\boldsymbol{1\leqq x}$

(3)　$x^2+xy+y^2>x+y$　より　$y^2+(x-1)y+x^2-x>0$

これがすべての実数 y で成り立つのは，判別式　$D_2=(x-1)^2-4(x^2-x)<0$　のとき

$(x-1)\{(x-1)-4x\}<0$　　$(x-1)(3x+1)>0$　　よって　$\boldsymbol{x<-\frac{1}{3}}$，$\boldsymbol{1<x}$

3　関数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ここで，a，b，c は $a<b<c$ を満たす実数とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，a，b，c，α，β の大小関係を調べよ．

(2)　$(\beta-\alpha)^2$ を a，b，c で表せ．

(3)　$b-a$ と $c-b$ の小さくない方の値を M とする．$\frac{\beta-\alpha}{M}$ の最大値を求めよ．

---

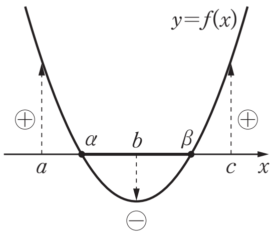
(1)　$f(x)$ の x^2 の係数は 3 より，グラフは下に凸の放物線．

また，$a<b<c$ より

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図．したがって　$\boldsymbol{a<\alpha<b<\beta<c}$

(2)　$f(x)=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$

よって，$f(x)=0$ において，解と係数の関係により

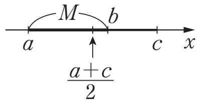
$$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(a+b+c) \qquad \alpha\beta=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

このとき　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

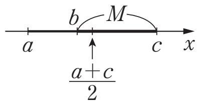
$$=\frac{4}{9}(a+b+c)^2-\frac{4}{3}(ab+bc+ca)$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

(3)　$M=\max\{b-a,\ c-b\}$



$$=\begin{cases} b-a & \left(b-a \geqq c-b \text{　つまり　} b \geqq \dfrac{a+c}{2} \text{ のとき}\right) \\ c-b & \left(b-a \leqq c-b \text{　つまり　} b \leqq \dfrac{a+c}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$



よって　$0<b-a \leqq M$　……①　$0<c-b \leqq M$　……②　である．

これらの等号が同時に成り立つのは　$b=\dfrac{a+c}{2}$　のときである．

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{M^2}=\frac{4}{9M^2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{2}{9M^2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

①，②より　$c-a=(b-a)+(c-b) \leqq M+M=2M$

つまり　$0<c-a \leqq 2M$　……③　$\left(\text{等号成立は　} b=\dfrac{a+c}{2} \text{　のとき}\right)$

①～③より

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{M^2} \leqq \frac{2}{9M^2}(M^2+M^2+4M^2)=\frac{4}{3}$$

等号成立は　$b=\dfrac{a+c}{2}$　のとき．

$\dfrac{\beta-\alpha}{M}>0$　より　$\dfrac{\beta-\alpha}{M} \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　したがって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

第３講　場合の数・確率(1)

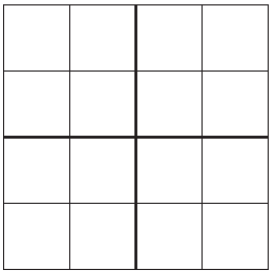
1　右図のように，4 行 4 列の 16 個のマス目をつくり，さらに太線でそれぞれ 2 行 2 列からなる 4 つの区画に分ける．それぞれのマス目に 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書き込む．ただし，以下の 3 つの条件をすべて満たすものとする．

(i)　各行には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

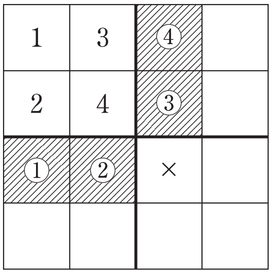
(ii)　各列には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

(iii)　各区画には 1，2，3，4 が 1 回ずつ現れる．

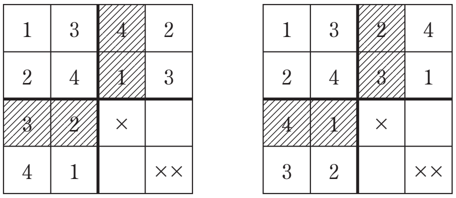
数字の書き込み方は全部で何通りあるか．



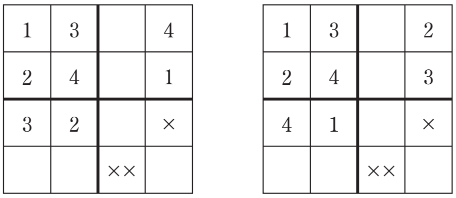
右図のように，左上の区画に 1，2，3，4 を書き込むとする．
これに隣接する右上，左下のマス目に書き込む方法は，右図の①～④にそれぞれ書き込む方法であるから
$2^4=16$（通り）である．



このうち，①～④に 1，2，3，4 が 1 つずつ入るとすると×の箇所には数字を書き込むことができない．
ここで，①は 3 か 4 である．それに応じて右上，左下の区画に書き込む方法は右図の 2 通りのみである．このとき，同時に××の箇所も数字を書き込むことができない．



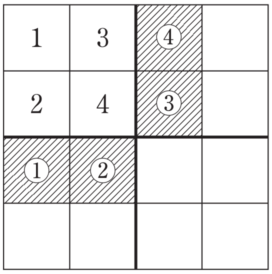
同様に，右下の区画に数字を書き込むことができない例として右図の 2 通りがある．



したがって，左上の区画の決め方に対し，右下の区画に書き込むことができない場合が 4 通りある．この 4 通りを除く 12 通りは，右下の区画が条件によりただ 1 通りに決まる．左上の区画の決め方は　$4!=24$（通り）
よって，求める場合の数は　$24\times12=$ **288（通り）** である．

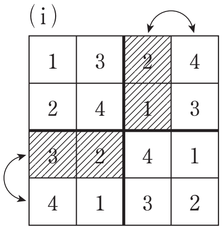
【別解】

右図のように，左上の区画に 1，2，3，4 を書き込むとする．
これに隣接するマス目を図のように①～④とすると，①～④にすべて異なる数字が入っていなければ，残りのマス目に書き込む数字は 1 通りに定まる．

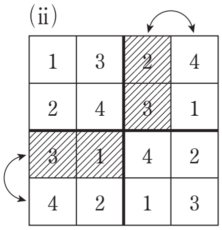


①～④に数字を書き込む方法は，例として右図(ⅰ)のようになる．
ここで最右端の２列を入れ換えても条件は満たされる．同様に最下端の２行を入れ換えても条件は満たされるので，このとき　$2\times2=4$（通り）
の書き込み方がある．

(ⅰ)

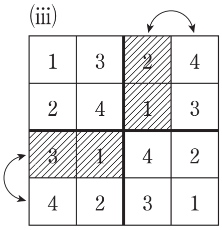


(ⅱ)

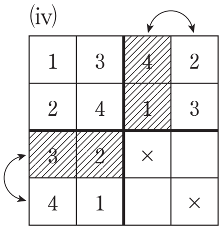


①～④に数字を書き込む方法は，他に右図(ⅱ)～(ⅳ)とそのそれぞれについて右２列，下２行を入れ換えた書き込み方があり，条件を満たすのは
(ⅱ)の場合　$2\times2=4$（通り）
(ⅲ)の場合　$2\times2=4$（通り）
(ⅳ)の場合は，①～④の数字がすべて異なり，×の箇所に数字を書き込むことができないので
0 通り
となる．

(ⅲ)



(ⅳ)



よって(ⅰ)～(ⅳ)に数字を書き込む方法は　$4+4+4+0=12$（通り）である．

さらに左上の区画に数字を書き込む方法は　${}_4P_4=4!=24$（通り）あるので，題意を満たす書き込み方は全部で　$24\times12=$**288（通り）**となる．

2　数字 1，2，3 を使ってできる次のような整数の個数を求めよ．ただし，同じ数字を重複して使ってよいものとする．

(1)　5 桁の整数　　(2)　5 桁の整数で 2 の倍数
(3)　5 桁の整数で 3 の倍数　　(4)　5 桁の整数で 4 の倍数
(5)　5 桁の整数で 6 の倍数

---

(1)　各位の数字はそれぞれ 1，2，3 の 3 通り．よって 5 桁の整数は　$3^5=$**243（個）**

(2)　2 の倍数は 1 の位が 2 の倍数，すなわち 2 であればよい．よって　$3^4\times1=$**81（個）**

(3)　3 の倍数は各位の数字の和が 3 の倍数のときである．
1 の位以外の 4 桁の数字の和が 3 の倍数のとき，1 の位は 3 であればよく，
和が　(3 の倍数)$+1$　のときは，1 の位は 2
和が　(3 の倍数)$+2$　のときは，1 の位は 1
であればよい．
すなわち，1 の位以外の 4 桁を決めると，1 の位はそれに応じて 1 通りに決まる．

よって　$3^4\times1=$**81**（**個**）

⑷　4 の倍数になるのは，下 2 桁が 4 の倍数のときであり，12 と 32 に限られる．
よって　$3^3\times2=$**54**（**個**）

⑸　6 の倍数，すなわち 2 の倍数かつ 3 の倍数になるときを考える．
2 の倍数になるのは 1 の位が 2 のとき．
よって残り 4 桁の和が　(3 の倍数)＋1　となればよい．
⑶と同様に，万，千，百の位の数字の和に応じて，十の位の数字はただ 1 通りに決まる．
したがって　$3^3\times1\times1=$**27**（**個**）

3 ［1］　−，1，2，3 の符号や数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがあり，これを並べて数をつくる．ただし，− が最後になる並べ方は除くものとし，数は計算した結果で考える．たとえば，1−23 という並べ方は −22 という数であると考える．このとき，次の問いに答えよ．
⑴　このような並べ方は全部で何通りあるか．また，できた数の中で最小のもの，最大のものは何か．
⑵　できた数すべての合計を求めよ．

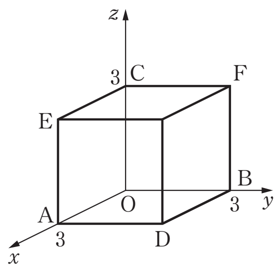
⑴　最後にくるカードはマイナスを除く 3 通り．それに対し，残りの 3 枚のカードの並べ方が　$3!=6$（通り）　よって並べ方は　$3\times6=$**18**（**通り**）
そのうち最小のものは　**−321**，最大のものは　$32-1=$**31**　である．
⑵　先頭が − のものの和は　$-123-132-213-231-312-321=-1332$
残り 12 個の並べ方は，12−3 と 3−12 のように，− の前後の数を入れ替えたものの組として存在する．それぞれの組の和は 0 である．
したがって，求める合計は　**−1332**

3 ［2］　空間において座標 $(x,\ y,\ z)$ にある点Ｐを１回の操作で $(x+1,\ y,\ z)$，$(x,\ y+1,\ z)$，$(x,\ y,\ z+1)$ のいずれかを選んでその座標に移動させる．最初に $(0,\ 0,\ 0)$ にある点Ｐを，９回の操作で $(3,\ 3,\ 3)$ に移動させる選び方のうち，$(3,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 3,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 3)$，$(0,\ 3,\ 3)$ のいずれも経由しないものは何通りあるか求めよ．

$(x,\ y,\ z)$ を $(x+1,\ y,\ z)$，$(x,\ y+1,\ z)$，$(x,\ y,\ z+1)$ に移動させることをそれぞれ X，Y，Z と表すとする．

$(0,\ 0,\ 0)$ から９回の移動で $(3,\ 3,\ 3)$ に移動する場合の数は　$\dfrac{9!}{3!3!3!}=1680$（通り）

右図のように点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆを設定する．



①　ＡまたはＢまたはＣを通るのは

９回の移動の先頭が XXX，YYY，ZZZ のとき．

それぞれ残りの移動が　$\dfrac{6!}{3!3!}=20$（通り）

９回の移動で通ることができるのはＡ，Ｂ，Ｃのいずれか１点のみ．

②　ＤまたはＥまたはＦを通るのは

９回の移動の末尾が ZZZ，YYY，XXX のとき．

それぞれ残りの移動が　$\dfrac{6!}{3!3!}=20$（通り）

９回の移動で通ることができるのはＤ，Ｅ，Ｆのいずれか１点のみ．

①と②が同時に起こるのは，Ａ，Ｂ，Ｃのそれぞれに対し，Ｄ，Ｅ，Ｆの選び方として２通りずつある．よって　$3\times2=6$（通り）

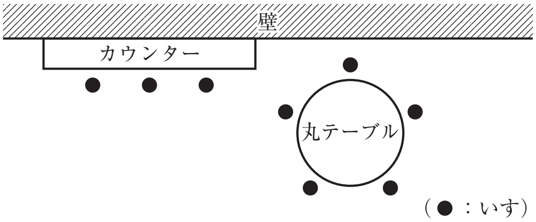
したがって，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆの少なくとも１つを通るのは

$20\times3+20\times3-6=114$（通り）

ゆえに，求める場合の数は　$1680-114=$ **1566（通り）** である．

第4講　場合の数・確率(2)

1　あなたと友人合わせて8人でレストランに行き，最大5人まで着席できる壁際のカウンター（片側のみ横1列に着席できる長テーブル）1つと，最大6人まで円形に着席できる丸テーブル1つに分かれて着席することにした．ただし，カウンターと丸テーブルそれぞれの最大着席可能人数を超えないように人数を配分し，それぞれのテーブルを着席人数で等分するようにいすを配置するものとする．例えば，カウンターに3人，丸テーブルに5人着席するときのいすの配置は上図のようになる．



(1)　カウンターに着席するグループと，丸テーブルに着席するグループへの分け方について考える．カウンターに着席する人数が2人であるようなグループ分けの方法は何通りあるか．また，グループ分けの方法は全部で何通りあるか．

(2)　全員の着席位置について考える．ただし丸テーブルについては，回転して重ね合わせることができる配置は同じものとみなす．カウンターに着席する人数が2人であるような着席位置は何通りあるか．また，着席位置は全部で何通りあるか．

(3)　あなたがカウンターの一番左のいすに着席する場合は何通りあるか．

(1)　カウンターに着席する2人の選び方は　${}_8C_2=\mathbf{28}$ **(通り)**　このとき丸テーブルに座る6人も決まる．

カウンターに着席することができる人数は2人，3人，4人，5人より，同様に考えるとグループ分けの総数は　$28+{}_8C_3+{}_8C_4+{}_8C_5=28+56+70+56=\mathbf{210}$ **(通り)**

(2)　カウンターに着席する人数が2人のとき，カウンターおよび丸テーブルの着席位置の決め方は　${}_8C_2\cdot 2!\times 5!=56\times 120=\mathbf{6720}$ **(通り)**

着席位置の総数は　$6720+({}_8C_3\cdot 3!\times 4!)+({}_8C_4\cdot 4!\times 3!)+({}_8C_5\cdot 5!\times 2!)$

$=6720+8064+10080+13440=\mathbf{38304}$ **(通り)**

(3)　あなたがカウンターの一番左のいすに着席するときをn通りとすると，他の7人がカウンターの一番左のいすに着席する方法もそれぞれn通りである．

したがって　$8n=38304$　より　$n=\mathbf{4788}$ **(通り)**

2　赤球7個と白球5個をA，B，Cの3つの箱に入れる．

(1)　赤球7個だけを3つの箱に入れるとき，入れ方は何通りあるか．ただし，球が入らない箱があってもよいものとする．

(2)　赤球7個と白球5個を3つの箱に入れるとき，入れ方は何通りあるか．ただし，球が入らない箱があってもよいものとする．

(3)　どの箱にも1個以上の球を入れるとき，赤球7個と白球5個を3つの箱へ入れるような入れ方は何通りあるか．

⑴　赤球７個の個数の分け方の組み合わせは

(7, 0, 0), (6, 1, 0), (5, 2, 0), (5, 1, 1), (4, 3, 0), (4, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2)

(7, 0, 0), (5, 1, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2) のとき，個数に対応する箱の決め方がそれぞれ $\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

(6, 1, 0), (5, 2, 0), (4, 3, 0), (4, 2, 1) のとき，箱の決め方がそれぞれ　$3!=6$（通り）

よって，求める場合の数は　$4\cdot3+4\cdot6=\mathbf{36}$ **（通り）**

【別解】　求める赤球の入れ方の総数は，赤球７個と仕切り２本の順列の総数に等しい．

よって，求める場合の数は　$\dfrac{9!}{7!2!}={}_9C_2=\mathbf{36}$ **（通り）**

⑵　⑴の赤球の入れ方のそれぞれに対し，白球５個の入れ方が　$\dfrac{7!}{5!2!}={}_7C_2=21$（通り）ある．よって，求める場合の数は　$36\times21=\mathbf{756}$ **（通り）**

⑶　空箱ができるときを考える．

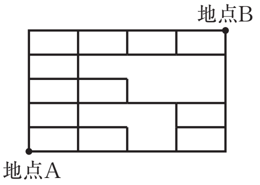
空箱が２個できるのは，箱 A，B，C のいずれか１つにすべての球が入るときで３通り．

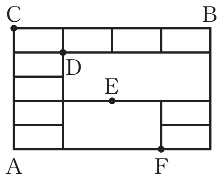
空箱が１個のみできるとき，その空箱がどれであるかで３通り，残りの２つの箱に赤球７個，白球５個を空箱ができないように入れる方法は　$\dfrac{8!}{7!1!}\times\dfrac{6!}{5!1!}-2=46$（通り）

よって　$3\cdot46=138$（通り）

したがって，求める場合の数は　$756-(3+138)=\mathbf{615}$ **（通り）**

3　[1]　右図において，地点 A から地点 B への最短経路の総数を求めよ．





最短経路をたどるとき，通ることのできる路は右図．

さらに最短経路は右図の C，D，E，F の点のいずれかを通る場合であり，それですべてである．

それぞれの経路の数は

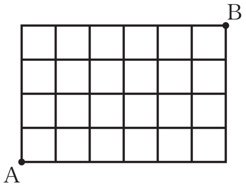
$1\cdot1=1$，${}_5C_1\cdot{}_4C_1=20$，${}_3C_1\cdot1\cdot1=3$，$1\cdot{}_3C_1\cdot1=3$

よって，求める総数は　$1+20+3+3=\mathbf{27}$ **（本）**

3 ［2］　右のような道路の図において，最も小さい正方形の1辺の長さは1ｍであるとする．

(1)　A地点からB地点まで最短距離で行く経路のうち，その経路に含まれる最も長い直線路の長さが5ｍ以上であるものは何通りあるかを求めよ．

(2)　A地点からB地点まで最短距離で行く経路のうち，その経路に含まれる最も長い直線路の長さが4ｍ以上であるものは何通りあるかを求めよ．



(1)　右図においてAから右に5進んでからBに進む場合の数は

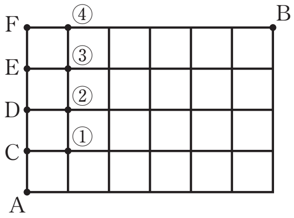
$_5C_1=5$（通り）

Aから C に進み，右に5進んでBに進む場合は

$_4C_1=4$（通り）

Aから D に進み，右に5進んでBに進む場合は

$_3C_1=3$（通り）



Aから E に進み，右に5進んでBに進む場合は　$_2C_1=2$（通り）

Aから F に進み，右に5進んでBに進む場合は　$_1C_1=1$（通り）

ここまでで合計15通り．

また，条件を満たしてBからAに同様に進む場合を考えると15通りある．

この30通りのうち，同じ経路は直線路を6ｍ進むときで，5通りある．

したがって求める場合の数は　$30-5=$**25（通り）**

(2)　(1)の図において

Aから右に4進んでからBに進む場合の数は　$_6C_2=15$（通り）

Aから C に進み，右に4進んでBに進む場合は　$_5C_2=10$（通り）

Aから D に進み，右に4進んでBに進む場合は　$_4C_2=6$（通り）

Aから E に進み，右に4進んでBに進む場合は　$_3C_2=3$（通り）

Aから F に進み，Bに進む場合は　$_2C_2=1$（通り）

ここまでで35通り．条件を満たしてBからAに同様に進む場合も35通り．

この70通りのうち，同じ経路は直線路を6ｍ進むときの5通り．よって　65通り．

また，(1)の図において

Aから C を通らず①に進み（1通り），右に4進んでBに進む場合は　$1\times3=3$（通り）

Aから C－D を通らず②に進み（2通り），右に4進んでBに進む場合は

$2\times2=4$（通り）

Aから C－D－E を通らず③に進み（3通り），右に4進んでBに進む場合は

$3\times1=3$（通り）

さらに，右に3，上に4，右に3進む場合が1通り．

以上より，求める場合の数は　**76通り**．

【別解】

(1)　最も長い直線路が 5 m 以上であるのは，右の図 1，図 2 の経路のみである．

このとき A から B まで進む場合の数は，↑4 つと → 1 つと ⟶ 1 つのあわせて 6 つの矢印を 1 列に並べる並べ方の総数に一致する．つまり

$${}_6C_2 = \frac{6!}{4!2!} = 15\text{（通り）}$$

ここで最も長い直線路が 6 m である経路は 5 通りあり，図 1，図 2 のどちらにも含まれるので，

求める場合の数は　15×2－5＝**25（通り）**

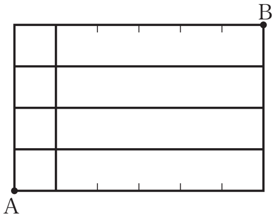


図 1

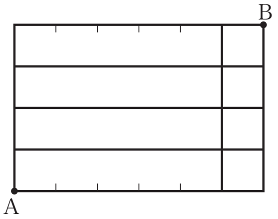


図 2

(2)　最も長い直線路が 4 m 以上であるのは，右の図 3〜図 6 の経路のみである．

図 3，図 4 の経路で A から B まで進む場合の数は，↑4 つと → 2 つと ⟶ 1 つのあわせて 7 つの矢印を 1 列に並べる並べ方の総数に一致する．つまり

$${}_7C_3 = \frac{7!}{4!3!} = 35\text{（通り）}$$

このうち最も長い直線路が 6 m である経路は，(1)より図 3，図 4 に共通して 5 通りあり，最も長い直線路が 5 m の経路は図 3 と図 4 では重複しないので，図 3，図 4 の場合の数は

35×2－5＝65（通り）

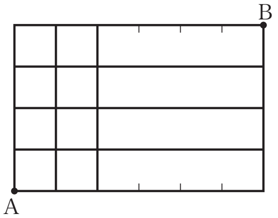


図 3

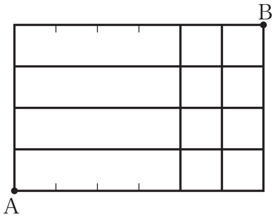


図 4

図 5 の経路で A から B まで進む場合の数は，↑4 つと → 2 つと ⟶ 1 つのあわせて 7 つの矢印を 1 列に並べる並べ方の総数に一致するので，${}_7C_3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$（通り）

このうち最も長い直線路が 5 m 以上のものは図 3，図 4 にも含まれ，その総数は(1)より 25 通りであるので，図 5 で最も長い直線路が 4 m である場合の数は　35－25＝10（通り）

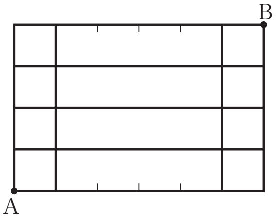


図 5

図 6 の経路で A から B まで進む場合の数は 1 通り．

以上より，求める場合の数は　65＋10＋1＝**76（通り）**

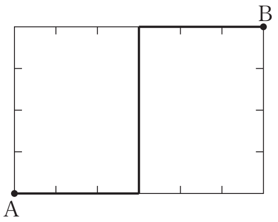


図 6

第５講　場合の数・確率(3)

1　3 個のさいころを同時に投げる.

(1)　出る目の最小値が 3 以上になる確率を求めよ.

(2)　3 個のうち，いずれか 2 個の目の和が 8 になる確率を求めよ.

(3)　出る目の最小値が 2 以下になり，かつどの 2 個の目の和も 8 でない確率を求めよ.

3 個のさいころを投げたときの出目の総数は 6^3 通り.

(1)　出目の最小値が 3 以上，すなわち 3 個とも 3 以上の出目となるとき，目の出方は 4^3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$

(2)　2 個の目の和が 8 となるとき，その目の組合せは (6, 2)，(5, 3)，(4, 4)

(i)　(6, 2) のとき

もう 1 個の目が 1，3，4，5 のとき，3 個のさいころの目の出方は　$3!=6$（通り）

もう 1 個の目が 2，6 のとき，3 個のさいころの目の出方は　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

よって　$4\times6+2\times3=30$（通り）

(ii)　(5, 3) のとき　30 通り

(iii)　(4, 4) のとき

もう 1 個の目が 1，2，3，5，6 のとき，3 個のさいころの目の出方は 3 通り

もう 1 個の目が 4 のとき，3 個のさいころの目の出方は 1 通り

よって　$5\times3+1\times1=16$（通り）

(i)〜(iii)より，求める確率は　$\dfrac{30+30+16}{6^3}=\mathbf{\dfrac{19}{54}}$

(3)　事象 A：出る目の最小値が 3 以上　　事象 B：いずれか 2 個の目の和が 8

とすると，それぞれの確率は(1)より　$P(A)=\dfrac{8}{27}$，(2)より　$P(B)=\dfrac{19}{54}$　である.

$A\cap B$ となるのは，(2)より 3 個のさいころの目が

(5, 3, 4)，(5, 3, 6) のとき，それぞれの目の出方は 6 通り

(5, 3, 3)，(5, 3, 5)，(4, 4, 3)，(4, 4, 5)，(4, 4, 6) のとき，それぞれの目の出方は 3 通り

(4, 4, 4) のとき，目の出方は 1 通り

よって　$6\times2+3\times5+1=28$（通り）より　$P(A\cap B)=\dfrac{28}{6^3}=\dfrac{7}{54}$

したがって　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{8}{27}+\dfrac{19}{54}-\dfrac{7}{54}=\dfrac{14}{27}$

ゆえに，求める確率は　$1-P(A\cup B)=\mathbf{\dfrac{13}{27}}$

2 (1) 袋の中に赤玉１個と白玉２個が入っている．この袋から中を見ないで玉を１個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に赤玉が取り出される確率 P_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ を求めよ．

(2) 袋の中に赤玉２個と白玉 n 個が入っている．この袋から中を見ないで玉を１個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に２個目の赤玉が取り出される確率 Q_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n+2)$ を求めよ．

(1) ３個の玉の順列は　$\dfrac{3!}{1!2!}=3$（通り）

そのうち，赤玉が k 番目 $(k=1,\ 2,\ 3)$ となるのはそれぞれ１通り．

したがって　$\boldsymbol{P_k=\dfrac{1}{3}}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$

(2) $n+2$ 個の玉の順列は　$\dfrac{(n+2)!}{2!n!}={}_{n+2}C_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$（通り）

そのうち k 番目に赤玉が出るとき，もう１個の赤玉が１番目から $k-1$ 番目のどこに出るかで $k-1$ 通り．

したがって　$Q_k=\dfrac{k-1}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2(k-1)}{(n+2)(n+1)}}$

3 ３人でじゃんけんをし，勝者が１人になるまで繰り返す．ただし，ある回のじゃんけんで負けた者は，その次以降の回では参加できないものとする．

(1) １回のじゃんけんの後，３人が勝ち残っている確率，および，２人が勝ち残っている確率をそれぞれ求めよ．

(2) ちょうど３回でじゃんけんが終わる確率を求めよ．

(3) じゃんけんが n 回以下で終わる確率を求めよ．

(1) ３人のじゃんけんをするとき，手の出方は 3^3 通り．

このうち，１人勝ちとなるのは，誰が何の手で勝つかで　${}_3C_1\times3=3^2$（通り）

その確率は　$\dfrac{3^2}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

また，２人勝ちとなるのは　${}_3C_2\times3=3^2$（通り）　その確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

よって，３人勝ち残り，すなわちあいこの確率は　$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2) ２人でじゃんけんをするとき，手の出方は 3^2 通り．

このうち，どちらかが勝つのは　${}_2C_1\times3=6$（通り）　その確率は　$\dfrac{6}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

よって，あいことなる確率は　$1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

3人でじゃんけんを行って2人勝ち，1人勝ち，あいことなることをそれぞれ ${}_3W_2$，${}_3W_1$，D_3 と表し，2人でじゃんけんを行って1人勝ち，あいことなることをそれぞれ ${}_2W_1$，D_2 と表すこととする．

${}_2W_1$ が起こる確率は $\frac{2}{3}$ であり，他のものが起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である．

ちょうど3回で終わるのは，順に

$D_3\ D_3\ {}_3W_1$，$D_3\ {}_3W_2\ {}_2W_1$，${}_3W_2\ D_2\ {}_2W_1$　のときである．

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{5}{27}}$

(3)　n 回までに終わらない確率を考える．

1回目から k 回目（$0\leqq k\leqq n$）まで D_3，$k+1\leqq n$ のときは $k+1$ 回目で ${}_3W_2$，$k+2\leqq n$ のときは $k+2$ 回目から n 回目まで D_2 が起こる確率は　$\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

これは k によらない関数である．

したがって，n 回で終わらない確率は

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot(n+1)$$

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{1-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

第６講　場合の数・確率(4)

1　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する．ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする．座標平面における領域を $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とし，D 上を動く点Qを考える．Qは点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む．なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする．

(1)　硬貨を４回投げてQが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ．

(2)　硬貨を５回投げて５回目に初めてQが点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ．

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ．

(1)　４回投げて表が２回，裏が２回出るときで，その確率は

$$P_4=\frac{4!}{2!2!}p^2q^2=\boldsymbol{6p^2q^2}$$

(2)　題意を満たすのは，４回投げた後 $(2,\ 1)$ または $(1,\ 2)$ に位置し，その後それぞれ裏，表が出るときである．４回投げた後に

$(2,\ 1)$ にいるのは，表が３回，裏が１回出るとき

$(1,\ 2)$ にいるのは，表が１回，裏が３回出るとき

よって　$P_5={}_4\mathrm{C}_1p^3q\times q+{}_4\mathrm{C}_1pq^3\times p=4p^2q^2(p+q)=\boldsymbol{4p^2q^2}$

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ より　$p^2q^2=\dfrac{1}{36}$　つまり　$pq=\dfrac{1}{6}$

これと　$p+q=1$ より，p，q は２次方程式　$t^2-t+\dfrac{1}{6}=0$　の２解である．

$6t^2-6t+1=0$　より　$t=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$　　したがって　$\boldsymbol{p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}}$

2　ＡとＢの２チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合を繰り返す．各試合でＡが勝つ確率を p，Ｂが勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．ＡがＢより先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1)　P_2 を p と q で表せ．

(2)　P_3 を p と q で表せ．

(3)　P_4 を p と q で表せ．

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ．

勝者を左から順に列挙することとする．

(1)　ＡがＢより先に２勝するのは，AA，ABA，BAA の３通りのみ．

よって　$P_2=p^2+pqp+qp^2=\boldsymbol{p^2(2q+1)}$

(2)　最後の回を除くと，Ａは２勝し，Ｂは多くて２勝である．

　Bが0勝のとき，AAの1通り

　Bが1勝のとき，A，A，Bの順列で　${}_3C_1=3$（通り）

　Bが2勝のとき，A，A，B，Bの順列で　${}_4C_2=6$（通り）

最後の回はAが必ず勝つ．よって

$$P_3=(p^2\cdot 1+p^2q\cdot 3+p^2q^2\cdot 6)\cdot p=\boldsymbol{p^3(6q^2+3q+1)}$$

(3)　(2)と同様に $P_4=p^4(1+{}_4C_1\cdot q+{}_5C_2\cdot q^2+{}_6C_3\cdot q^3)=\boldsymbol{p^4(20q^3+10q^2+4q+1)}$

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき　$p=1-q$ より

$$P_3-P_4=p^3\{(6q^2+3q+1)-(1-q)(20q^3+10q^2+4q+1)\}$$
$$=p^3(20q^4-10q^3)=10p^3q^3(2q-1)>0 \qquad よって\quad P_4<P_3$$

3　[1]　n を2以上の整数とし，袋の中に，白玉が5個，赤玉が n 個入っているとする．この袋から2個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉1個ずつである確率を p_n とし，また，取り出した白玉の個数を X とする．

(1)　p_n を求めよ．

(2)　p_n が最大になる n の値と，そのときの p_n の値を求めよ．

(3)　X の期待値が0.625になるとき，n の値を求めよ．

---

(1)　$p_n=\dfrac{{}_5C_1\cdot{}_nC_1}{{}_{n+5}C_2}=\boldsymbol{\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}}$

(2)　$p_n<p_{n+1}$ とすると　$\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}<\dfrac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}$

$$n(n+6)<(n+1)(n+4) \qquad よって\quad n<4 \qquad すなわち\quad n\leqq 3$$

よって

$n=2,\ 3$ のとき，$p_n<p_{n+1}$　　$n=4$ のとき，$p_n=p_{n+1}$　　$n\geqq 5$ のとき，$p_n>p_{n+1}$

つまり　$p_2<p_3<p_4=p_5>p_6>p_7>\cdots\cdots$

したがって，$\boldsymbol{n=4,\ 5}$　のとき最大値　$\boldsymbol{p_4=p_5=\dfrac{5}{9}}$

(3)　$X=1$ のとき　確率は　p_n

　$X=2$ のとき　確率は　$\dfrac{{}_5C_2}{{}_{n+5}C_2}=\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$（$=q_n$ とする）

よって，X の期待値 $E(X)$ は　$E(X)=1\cdot p_n+2\cdot q_n=\dfrac{10n+40}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{10}{n+5}$

$E(X)=0.625=\dfrac{5}{8}$ より　$\dfrac{10}{n+5}=\dfrac{5}{8}$　　よって　$\boldsymbol{n=11}$

3 [2]　N を 2 以上の自然数とする．1 から N までの番号を 1 つずつ書いた N 枚のカードから 2 枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号を X とし，小さい番号を Y とする．

(1)　i を 1 以上 N 以下の自然数とするとき，$X=i$ となる確率 p_i および $Y=i$ となる確率 q_i を求めよ．

(2)　X の期待値 E_1 および Y の期待値 E_2 を求めよ．

(1)　$X=i$ となるとき

Y は 1 から $i-1$ までの $i-1$ 枚から 1 枚取り出せばよい（$i \geqq 2$ のとき）．

よって　$p_i=\dfrac{{}_{i-1}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2}=\dfrac{i-1}{\dfrac{N(N-1)}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2(i-1)}{N(N-1)}}$

$p_1=0$ であるから，この式は $1 \leqq i \leqq N$ で成り立つ．

$Y=i$ となるとき

X は $i+1$ から N までの $N-i$ 枚から 1 枚取り出せばよい（$i \leqq N-1$ のとき）．

よって　$q_i=\dfrac{{}_{N-i}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\dfrac{2(N-i)}{N(N-1)}}$

$q_N=0$ であるから，この式は $1 \leqq i \leqq N$ で成り立つ．

(2)　$E_1=\displaystyle\sum_{i=1}^{N} i\cdot\frac{2(i-1)}{N(N-1)}=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(i^2-i)$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\left\{\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)-\frac{1}{2}N(N+1)\right\}$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1-3)=\frac{2(N+1)(N-1)}{3(N-1)}=\boldsymbol{\frac{2}{3}(N+1)}$$

$E_2=\displaystyle\sum_{i=1}^{N} i\cdot\frac{2(N-i)}{N(N-1)}=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(-i^2+Ni)$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\left\{-\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{1}{2}N^2(N+1)\right\}$$

$$=\frac{2}{N(N-1)}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(-2N-1+3N)=\boldsymbol{\frac{1}{3}(N+1)}$$

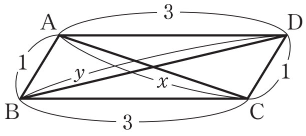
第７講　三角比・平面図形

1　四角形 ABCD において AB＝CD＝1，BC＝DA＝3 であり，対角線 AC，BD の長さをそれぞれ x，y とする．

(1)　四角形 ABCD の面積 S を x を用いて表せ．また，S の最大値 S_0 を求めよ．

(2)　面積が $\dfrac{1}{3}S_0$ である四角形 ABCD に対して x^2，y^2 の値を求めよ．ただし，$x \leqq y$ とし，S_0 は(1)で求めたものとする．

(3)　cos∠ACB を x で表せ．また，∠ACB が最大となる x の値を求めよ．



(1)　$\cos\angle ABC = \dfrac{1+9-x^2}{2\cdot1\cdot3} = \dfrac{10-x^2}{6}$　より

$$1-\cos^2\angle ABC = 1-\frac{(10-x^2)^2}{36} = \frac{-x^4+20x^2-64}{36}$$

よって，$S = \triangle ABC \times 2$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot\sin\angle ABC\right)\times2 = 3\sqrt{1-\cos^2\angle ABC} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2}}$$

AB＝1，BC＝3 より，$2<x<4$

また，$S = \dfrac{\sqrt{-(x^2-10)^2+36}}{2}$　より

$x=\sqrt{10}$ のとき S は最大となり　$S_0 = \dfrac{\sqrt{36}}{2} = \boldsymbol{3}$

【別解】　$s = \dfrac{1}{2}(1+3+x) = \dfrac{1}{2}(x+4)$ とすると，ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{s(s-1)(s-3)(s-x)}\times2 = \frac{1}{2}\sqrt{(x+4)(x+2)(x-2)(-x+4)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-(x^2-16)(x^2-4)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2}}$$

(2)　四角形 $\mathrm{ABCD} = \dfrac{1}{3}S_0 = S$ より　$\sqrt{-x^4+20x^2-64} = 2$

$x^4-20x^2+68=0$　　$x^2 = 10\pm4\sqrt{2}$

この２解のうち一方が x^2，もう一方が y^2 である．

$x \leqq y$ より　$\boldsymbol{x^2 = 10-4\sqrt{2}}$　　$\boldsymbol{y^2 = 10+4\sqrt{2}}$

(3)　$\cos\angle ACB = \dfrac{9+x^2-1}{2\cdot3\cdot x} = \dfrac{x^2+8}{6x} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{x^2+8}{x} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}\left(x+\dfrac{8}{x}\right)}$　……①

$x>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

$$①\geqq \frac{1}{6}\cdot2\sqrt{x\cdot\frac{8}{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\quad\left(等号成立は\quad x=\frac{8}{x}\quad つまり\quad x=2\sqrt{2}\quad のとき\right)$$

よって　$x=2\sqrt{2}$ のとき　cos∠ACB の最小値は　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

cos∠ACB が最小のとき ∠ACB は最大より，求める x の値は　$\boldsymbol{x=2\sqrt{2}}$

2 円周上に 4 点 A，B，C，D が反時計回りに並んでいる．直線 AB と直線 DC の交点を E，線分 AC と BD の交点を F とする．AB＝1，BE＝3，AE＝4 であり，△DCF の面積は △ABF の面積の 4 倍である．

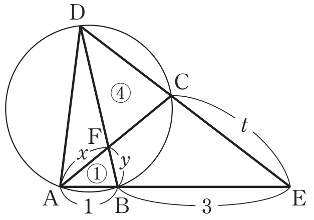
FA＝x，FB＝y，CE＝t，$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて，以下の問いに答えよ．

(1) FC，FD を x，y で表せ．

(2) t の値を求めよ．

(3) u の値を求めよ．

(4) 面積の比の値 $\dfrac{\triangle AED}{\triangle ABF}$ を求めよ．



(1) △ABF∽△DCF で，面積比 1：4 より相似比 1：2

よって　FD＝2FA＝$\mathbf{2x}$　　FC＝2FB＝$\mathbf{2y}$

CD＝2AB＝2

(2) 方べきの定理により　EC・ED＝EB・EA

$t\cdot(t+2)=3\cdot4$　　$t^2+2t-12=0$

$t>0$ より　$\boldsymbol{t=-1+\sqrt{13}}$

(3) △FAD∽△FBC より　$x:y=\text{AD}:\text{BC}$

△EAD∽△ECB　より　AD：BC＝AE：CE＝4：t

よって　$x:y=4:t$　より　$u=\dfrac{y}{x}=\dfrac{t}{4}=\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}}$

(4) $\triangle ABD=\dfrac{BD}{BF}\cdot\triangle ABF=\dfrac{2x+y}{y}\triangle ABF$

$\triangle AED=\dfrac{AE}{AB}\cdot\triangle ABD=4\cdot\triangle ABD=\dfrac{4(2x+y)}{y}\triangle ABF$

よって　$\dfrac{\triangle AED}{\triangle ABF}=4\cdot\dfrac{2x+y}{y}=4\left(2\cdot\dfrac{x}{y}+1\right)$

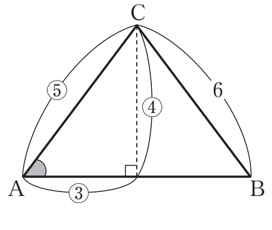
$=4\left(2\cdot\dfrac{4}{-1+\sqrt{13}}+1\right)=4\left\{\dfrac{2(\sqrt{13}+1)}{3}+1\right\}=\boldsymbol{\dfrac{20+8\sqrt{13}}{3}}$

3　△ABC は，$\tan A=\dfrac{4}{3}$，BC＝6 を満たしているものとする．ただし，$A=\angle BAC$ とする．

(1)　$\sin A$ および $\cos A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　△ABC の外接円の半径を求めよ．

(3)　△ABC の面積の最大値と，そのときの辺 AB の長さを求めよ．

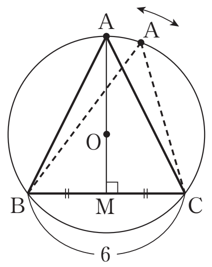


(1)　△ABC において，$\tan A>0$ より A は鋭角．

よって，右図より　$\boldsymbol{\sin A=\dfrac{4}{5}}$　　$\boldsymbol{\cos A=\dfrac{3}{5}}$

(2)　求める半径を R とすると

$$2R=\frac{BC}{\sin A} \text{ より }\quad R=\frac{6}{2\cdot\frac{4}{5}}=\boldsymbol{\frac{15}{4}}$$



(3)　△ABC の外接円の中心を O，線分 BC の中点を M とすると BC が一定であることより，A が BC の垂直二等分線 OM 上にあるとき，△ABC は最大となる．

このとき △ABC は AB＝AC の二等辺三角形となり，O は線分 AM 上にある．

三平方の定理により

$$OM^2=BO^2-BM^2=R^2-3^2=\frac{81}{16}\qquad OM=\frac{9}{4}$$

$$AM=AO+OM=R+\frac{9}{4}=6$$

よって求める面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AM=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6=\boldsymbol{18}$

また，このとき三平方の定理により　$AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{36+9}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

第８講　三角関数(1)

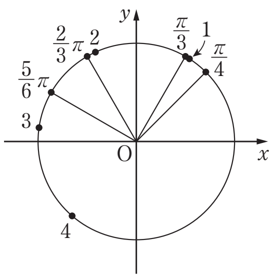
1 [1]　sin 1，sin 2，sin 3，sin 4 を小さい順に並べよ．ただし，角度は弧度法（ラジアン）である．

π(rad)＝180° より

$1=\dfrac{180}{\pi}\fallingdotseq 57.3°$　　$2=\dfrac{360}{\pi}\fallingdotseq 114.6°$

$3=\dfrac{540}{\pi}\fallingdotseq 171.9°$　　$4=\dfrac{720}{\pi}\fallingdotseq 229.2°$

よって，小さい順に　**sin 4，sin 3，sin 1，sin 2**



1 [2]　$\alpha+\beta=\dfrac{4}{3}\pi$　……①，$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　……②　のとき $\cos\alpha+\cos\beta$ の値を求めよ．

(①＋②)÷2 より　$\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}$

(①－②)÷2 より　$\beta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{4}$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

2　以下の ［ア］～［エ］ にあてはまる数字をそれぞれ答えよ．

[1]　座標平面上の点 P$(x,\ y)$ が媒介変数 θ を用いて

$x=-\sin\theta+2\cos\theta,\ \ y=2\sin\theta+3\cos\theta$

と表されているとする．このとき，原点を O とすると

$$OP^2=［ア］\sqrt{2}\sin\left(［イ］\theta+\frac{\pi}{［ウ］}\right)+［エ］$$ が成り立つ．

$OP^2=x^2+y^2$

$=(-\sin\theta+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+3\cos\theta)^2$

$=5\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+13\cos^2\theta$

$=5\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+8\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}+13\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=4\sin 2\theta+4\cos 2\theta+9$

$=4\sqrt{2}\left(\sin 2\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+9$

$=\boldsymbol{4}\sqrt{2}\sin\left(\boldsymbol{2}\theta+\dfrac{\pi}{\boldsymbol{4}}\right)+\boldsymbol{9}$

2 ［2］ $\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\left(\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|\right)$ であるから，

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のときは

$$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\boxed{\text{イ}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$$ である．

$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$ より　$\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ より　$\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$　したがって

$$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{\mathbf{2}}\left(\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$　より　$\cos\dfrac{\theta}{2}\geqq0$，$\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq0$

よって　$\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{\mathbf{4}}\right)$$

3 $0\leqq\theta<\pi$ のとき，次の方程式を解け．

$$\cos4\theta-2\cos3\theta+\cos2\theta=0$$

$$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$$

よって　$\cos4\theta-2\cos3\theta+\cos2\theta=0$　より

$$8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+2\cos^2\theta-1=0$$

$$4\cos^4\theta-4\cos^3\theta-3\cos^2\theta+3\cos\theta=0$$

$$\cos\theta(4\cos^3\theta-4\cos^2\theta-3\cos\theta+3)=0$$

$$\cos\theta(\cos\theta-1)(4\cos^2\theta-3)=0$$

$\cos\theta=0,\ 1,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0\leqq\theta<\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

第9講　三角関数(2)

1　a を実数とする．方程式 $\cos^2 x-2a\sin x-a+3=0$ の解で $0\leqq x<2\pi$ の範囲にあるものの個数を求めよ．

$\cos^2 x-2a\sin x-a+3=0$ より　$1-\sin^2 x-2a\sin x-a+3=0$

$\sin^2 x+2a\sin x+a-4=0$　……①

$\sin x=t$ とおくと　$0\leqq x<2\pi$ において

$-1<t<1$ である t の値1個に対し，x の値は2個

$t=1$，-1 に対し，x の値はそれぞれ1個対応し，

$t<-1$，$1<t$ である t の値に対応する x は存在しない．

①より　$t^2+2at+a-4=0$　……②

②の解の存在範囲について考える．

判別式 D について

$$\frac{D}{4}=a^2-(a-4)=a^2-a+4=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$$

より，②は異なる2つの実数解をもつ．

②の左辺を $f(t)$ とおくと，$f(t)=(t+a)^2-a^2+a-4$ より　軸：$t=-a$

また，$f(-1)=-a-3$　　$f(1)=3a-3$

(i)　$f(-1)>0$，$f(1)>0$，$-1<(\text{軸})<1$ のとき

$f(-1)>0$ より　$a<-3$　　$f(1)>0$ より　$a>1$

これらを同時に満たす a の値は存在しない．

(ii)　$f(-1)\cdot f(1)<0$ のとき

$(a+3)(a-1)>0$　　よって　$a<-3$，$1<a$

このとき②は $-1<t<1$ に1解のみもち，それにより x の値は2個存在する．

(iii)　$f(-1)=0$ のとき

$a=-3$　このとき②は　$t^2-6t-7=0$　　$t=-1$，7

よって，②は $t=-1$ と $1<t$ に1解ずつもち，それにより x の値は1個存在する．

(iv)　$f(1)=0$ のとき

$a=1$　このとき②は　$t^2+2t-3=0$　　$t=-3$，1

よって，②は $t=1$ と $t<-1$ に1解ずつもち，それにより x の値は1個存在する．

(i)～(iv)以外のときは，②は $-1\leqq t\leqq 1$ に解をもたず，x の値は1個も存在しない．

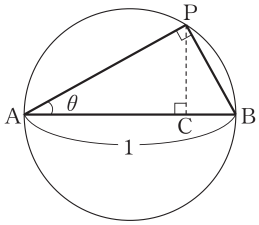
以上より
$$\begin{cases} a<-3,\ 1<a \text{ のとき　2個} \\ a=-3,\ 1 \text{ のとき　1個} \\ -3<a<1 \text{ のとき　0個} \end{cases}$$

2　長さ1の線分ABを直径とする円周上の点をPとするとき，次の問いに答えよ．ただし，Pは点A，Bとは異なるものとする．

(1)　$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とするとき，線分AP，BPの長さを θ を用いて表せ．

(2)　PからABに下ろした垂線とABとの交点をCとする．△APCと△BPCの周の長さの和 L を θ を用いて表せ．

(3)　L の最大値を求め，そのときの θ の値を求めよ．



(1)　$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\theta=\boldsymbol{\cos\theta}$　　$\mathrm{BP}=\mathrm{AB}\sin\theta=\boldsymbol{\sin\theta}$

(2)　$\mathrm{PC}=\mathrm{AP}\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$

よって　$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PC}+\mathrm{CA}+\mathrm{BP}+\mathrm{PC}+\mathrm{CB}$

$=\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+1$

$=\boldsymbol{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1}$

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと，$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=t^2$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$

よって　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　より　$1<t\leqq\sqrt{2}$

$$L=2\cdot\frac{t^2-1}{2}+t+1=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

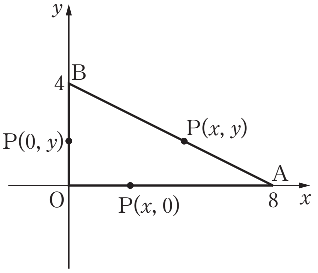
したがって　$t=\sqrt{2}$ のとき　L は最大値　$\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$ をとる．

また，このとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$　　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$　より　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4}}$

3　座標平面上の3本の直線 $x=0$，$y=0$ および $x+2y=8$ で囲まれた三角形の周上において，

$$z=\sin\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi y}{4}+\cos\frac{\pi(x+2y)}{8}$$

の最大値，最小値と，それを与える x，y の値をそれぞれ求めよ．



右図のようにO(0, 0)，A(8, 0)，B(0, 4)とし，P(x, y) が△OABの周上を動くときを考える．

(i)　Pが線分OA上のとき

$0\leqq x\leqq 8$，$y=0$

$$z=\sin\frac{\pi x}{8}+\cos\frac{\pi x}{8}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ より

$\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=(2,\ 0)$ のとき　最大値 $\sqrt{2}$

$\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$　つまり　$(x,\ y)=(8,\ 0)$ のとき　最小値 -1

(ii)　P が線分 AB 上のとき

$0\leqq y\leqq 4,\ x=8-2y$ より

$$z=\sin\frac{\pi(8-2y)}{8}\cos\frac{\pi y}{4}+\cos\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi y}{4}\right)\cos\frac{\pi y}{4}-1$$

$$=\sin\frac{\pi y}{4}\cos\frac{\pi y}{4}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi y}{2}-1,\ 0\leqq\frac{\pi y}{2}\leqq 2\pi \text{ より}$$

$\dfrac{\pi y}{2}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=(6,\ 1)$ のとき　最大値 $-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi y}{2}=\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のとき　最小値 $-\dfrac{3}{2}$

(iii)　P が線分 OB 上のとき

$x=0,\ 0\leqq y\leqq 4$

$$z=\cos\frac{\pi y}{4},\ 0\leqq\frac{\pi y}{4}\leqq\pi \text{ より}$$

$\dfrac{\pi y}{4}=0$　つまり　$(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき　最大値 1

$\dfrac{\pi y}{4}=\pi$　つまり　$(x,\ y)=(0,\ 4)$ のとき　最小値 -1

(i)〜(iii)より

$(x,\ y)=(2,\ 0)$ のとき　最大値 $\sqrt{2}$

$(x,\ y)=(2,\ 3)$ のとき　最小値 $-\dfrac{3}{2}$

第10講　指数関数・対数関数

1 ［1］　a，b，c が正の数で，$a\neq1$，$c\neq1$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$\log_a b=k$　とすると　$b=a^k$

両辺とも c を底とする対数をとると，$a>0$ より

$\log_c b=\log_c a^k=k\log_c a$　　$a\neq1$ より　$\log_c a\neq0$

よって　$\dfrac{\log_c b}{\log_c a}=k$

したがって　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

1 ［2］　等式 $\log_3 x-\dfrac{1}{\log_9 x}=(-1)^x$ を満たす正の整数 x の値を求めよ．

$\log_3 x-\dfrac{1}{\log_9 x}=(-1)^x$ より　$\log_3 x-\dfrac{2}{\log_3 x}=(-1)^x$

$\log_3 x=t$ とおくと

$t-\dfrac{2}{t}=(-1)^x$　つまり　$t^2-(-1)^x t-2=0$　……①　（明らかに $t\neq0$）

(i)　x が偶数のとき

①より　$t^2-t-2=0$　$(t-2)(t+1)=0$　　よって　$t=2,\ -1$

ゆえに　$\log_3 x=2,\ -1$　より　$x=3^2,\ 3^{-1}$　　つまり　$x=9,\ \dfrac{1}{3}$

いずれも偶数ではなく不適．

(ii)　x が奇数のとき

①より　$t^2+t-2=0$　　$(t+2)(t-1)=0$　　よって　$t=-2,\ 1$

ゆえに　$\log_3 x=-2,\ 1$　より　$x=3^{-2},\ 3$　　つまり　$x=\dfrac{1}{9},\ 3$

x は奇数より　$x=3$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{x=3}$

2　p を実数の定数として，実数 x の関数を $f(x)=25^x+\dfrac{1}{25^x}+2p\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}-1\right)+7$ とする．$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ とおき，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく．

(1)　関数 $g(t)$ を求めよ．

(2)　方程式 $g(t)=0$ が実数解をただ１つもつとき，p の値と解 t の値を求めよ．

(3)　方程式 $g(t)=0$ が次の条件を満たす２個の実数解 t_1，t_2 をもつとき，p がとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ．

(i)　$t_1<2,\ t_2>2$　　(ii)　$t_1=2,\ t_2>2$　　(iii)　$2<t_1<t_2$

(4)　t を定数とみなし，$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}$ を x の方程式とみなして，この方程式が異なる２つの実数解 x をもつように t の値を定めるとき，t がとり得る値の範囲を求めよ．

(5)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解 x の個数を，p の値で場合分けして求めよ．

(1)　$25^x+\dfrac{1}{25^x}=(5^x)^2+\left(\dfrac{1}{5^x}\right)^2=\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}\right)^2-2\cdot5^x\cdot\dfrac{1}{5^x}=\left(5^x+\dfrac{1}{5^x}\right)^2-2$　より

$g(t)=t^2-2+2p(t-1)+7=\boldsymbol{t^2+2pt-2p+5}$

(2)　$g(t)=0$ が実数解をただ１つ，すなわち重解をもつのは判別式 D について

$\dfrac{D}{4}=p^2-(-2p+5)=p^2+2p-5=0$　つまり　$p=-1\pm\sqrt{6}$ のとき

このとき　$g(t)=0$ は重解 $t=-p$ をもつ．

ゆえに　$\boldsymbol{(p,\ t)=(-1\pm\sqrt{6},\ 1\mp\sqrt{6})}$（複号同順）

(3)　(i)　$g(2)=2p+9<0$　より　$\boldsymbol{p<-\dfrac{9}{2}}$

(ii)　$g(2)=0$　より　$\boldsymbol{p=-\dfrac{9}{2}}$　このとき　$g(t)=t^2-9t+14=(t-2)(t-7)$　より

$g(t)=0$ の２解は $t=2,\ 7$　よって，題意を満たす．

(iii)　$g(2)>0$ より　$p>-\dfrac{9}{2}$　　軸：$t=-p>2$ より　$p<-2$

$D>0$ より　$p<-1-\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6}<p$　　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}}$

(4)　$5^x=X$ とおくと，$X>0$ である X の値１つに対し x の値が１つ対応する．

$t=5^x+\dfrac{1}{5^x}=X+\dfrac{1}{X}$　より　$X^2-tX+1=0$　これが異なる正の２実数解をもつのは，放物線のグラフを考えると（y 切片）>0 より　軸：$X=\dfrac{t}{2}>0$　かつ　判別式

$t^2-4>0$　　よって　$\boldsymbol{t>2}$　のときである．

(5)　$t>2$ である t の値1つに対し，x の値は2つ対応　　$t=2$ に対し，x の値は1つ $(x=0)$ 対応　　その他の t の値に対応する実数 x は存在しない．

(3)の(iii)で $2<t_1=t_2$ のときは $D=0$ であることを考慮して，(2)より　$p=-1-\sqrt{6}$

以上より　$-\frac{9}{2}<p<-1-\sqrt{6}$ **のとき　4個**　　$p=-\frac{9}{2}$ **のとき　3個**

$p<-\frac{9}{2}$，$p=-1-\sqrt{6}$ **のとき　2個**　　$-1-\sqrt{6}<p$ **のとき　0個**

3　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　2^n が10桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

(2)　2^n+3^n が10桁の数となるような正の整数 n の個数を求めよ．

---

(1)　2^n が10桁のとき　$10^9\leqq 2^n<10^{10}$

$\log_{10}10^9\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}10^{10}$　　$9\leqq n\cdot\log_{10}2<10$

$\frac{9}{0.3010}\leqq n<\frac{10}{0.3010}$　　$29.9\cdots\leqq n<33.2\cdots$　　よって　$n=30,\ 31,\ 32,\ 33$ の**4個**

(2)　3^n が10桁のとき　$10^9\leqq 3^n<10^{10}$　　$9\leqq n\cdot\log_{10}3<10$

$\frac{9}{0.4771}\leqq n<\frac{10}{0.4771}$　　$18.8\cdots\leqq n<20.9\cdots$　　よって　$n=19,\ 20$

$n=19$ のとき　$\log_{10}2^{19}=19\log_{10}2=19\times0.3010=5.719$　より　2^{19} は6桁

$\log_{10}3^{19}=19\log_{10}3=19\times0.4771=9.0649$　より　$3^{19}=10^{0.0649}\times10^9$

$1<10^{0.0649}<10^{0.3010}=2$ より　3^{19} の最高位の数字は1　　よって　$2^{19}+3^{19}$ が11桁となることはない．

$n=20$ のとき　$\log_{10}2^{20}=6.02$ より　2^{20} は7桁

$\log_{10}3^{20}=9.542=0.542+9$，$\log_{10}4=0.6020$　より　3^{20} の最高位の数字は3

よって　$2^{20}+3^{20}$ が11桁となることはない．

$n=18$ のとき　2^{18} は6桁以下であり，$\log_{10}3^{18}=0.5878+8$　より　3^{18} の最高位の数字は3

よって　$2^{18}+3^{18}$ が10桁となることはない．

以上より，題意を満たす n の個数は　$n=19,\ 20$ の**2個**

第 11 講　図形と方程式(1)

1　a を実数とする．関数 $y=|x-1|+|x-2|$ と関数 $y=x+a$ のグラフをそれぞれ G_1, G_2 とおく．G_1 と G_2 が交点をもつとする．

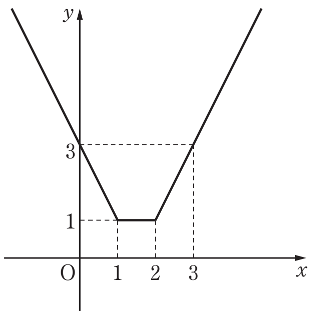
(1)　G_1 のグラフをかけ．

(2)　G_1 と G_2 の囲む領域が三角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，三角形の面積 S_1 を a を用いて表せ．

(3)　G_1 と G_2 の囲む領域が四角形であるとする．このときの a の値の範囲を求め，四角形の面積 S_2 を a を用いて表せ．

(1)　$y=|x-1|+|x-2|=\begin{cases} 2x-3 & (x\geqq 2) \\ 1 & (1\leqq x\leqq 2) \\ -2x+3 & (x\leqq 1) \end{cases}$

よって，G_1 のグラフは右図．



(2)　G_2 と直線 $y=1$ の交点を A とすると，A$(1-a,\ 1)$

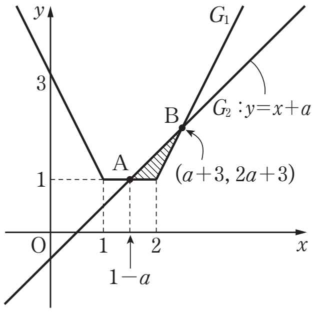
題意を満たすのはグラフより　$1\leqq$(A の x 座標)<2

つまり　$\boldsymbol{-1<a\leqq 0}$ のとき．

このとき　G_2 と直線 $y=2x-3$ との交点を B とすると

B$(a+3,\ 2a+3)$

よって　$S_1=\dfrac{1}{2}\{2-(1-a)\}\{(2a+3)-1\}=\boldsymbol{(a+1)^2}$



(3)　題意を満たすのはグラフより　(A の x 座標)<1

つまり　$\boldsymbol{a>0}$ のとき．

このとき G_2 と直線 $y=-2x+3$ の交点を C とすると

$$\mathrm{C}\left(\frac{3-a}{3},\ \frac{3+2a}{3}\right)$$

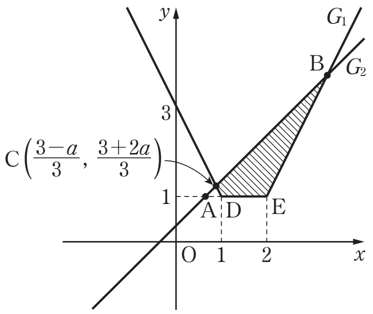
よって，D$(1,\ 1)$，E$(2,\ 1)$ とすると

$$S_2=\triangle\mathrm{AEB}-\triangle\mathrm{ADC}$$

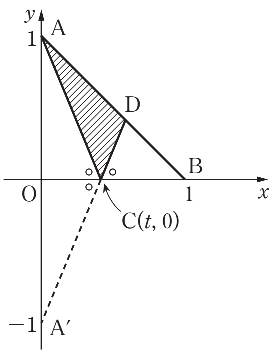
$$=(a+1)^2-\frac{1}{2}\{1-(1-a)\}\left(\frac{3+2a}{3}-1\right)$$

$$=(a+1)^2-\frac{1}{3}a^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}a^2+2a+1}$$



> **2**　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(t, 0) を考える．また線分 AB 上の点 D を，$\angle$ACO＝$\angle$BCD となるように定める．t の値を変化させたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．



A を x 軸に関して対称に移動した点を A′ とすると A′(0, −1)

直線 A′C の傾きは $\dfrac{1}{t}$ より，直線 A′C：$y=\dfrac{1}{t}x-1$

これと直線 AB：$y=-x+1$ との交点が D である．

よって　$D\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$

$$\triangle ACD=\triangle ABC-\triangle DBC$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{1+t}$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{-t^2+t}{1+t}$$
$$=-t+2+\frac{-2}{t+1}=-\left(t-2+\frac{2}{t+1}\right)=-\left(t+1+\frac{2}{t+1}-3\right)$$

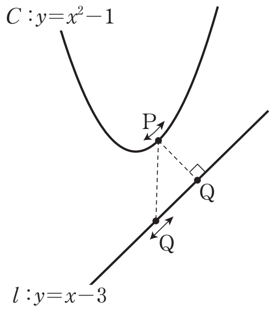
$0<t<1$　より　$t+1>0$　よって　(相加平均)≧(相乗平均) より

$$t+1+\frac{2}{t+1}-3\geqq 2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}-3=2\sqrt{2}-3$$

等号成立は　$t+1=\dfrac{2}{t+1}$ より　$(t+1)^2=2$　$t+1=\pm\sqrt{2}$　よって　$t=-1+\sqrt{2}$ のとき．

よって　$\triangle ACD\leqq-(2\sqrt{2}-3)=3-2\sqrt{2}$　より，求める面積の最大値は　$\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$

> **3**　曲線 $y=x^2-1$ 上を動く点 P と，直線 $y=x-3$ 上を動く点 Q との距離が最小となるときの点 Q の座標と，そのときの距離を求めよ．



$C：y=x^2-1$　と　$l：y=x-3$　について

$x^2-1=x-3$ とすると　$x^2-x+2=0$

判別式　$D=1-8=-7<0$

よって，C と l は共有点をもたない．

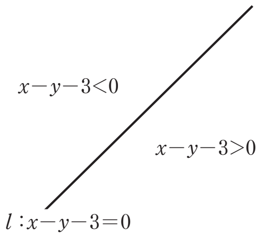
C 上の点 P と l 上の点 Q の最短距離は点 P と直線 l との距離である．

P(t, t^2-1) とおくと，$l：x-y-3=0$ との距離 d は

$$d=\frac{|t-(t^2-1)-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-t^2+t-2|$$

ここで P(t, t^2-1) は領域　$x-y-3<0$　内の点であることより

$t-(t^2-1)-3<0$　つまり　$-t^2+t-2<0$



よって　$d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t+2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\right\}$

したがって　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　d は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{2}}{8}}$ をとる．

このとき　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ を通り，l と垂直な直線は

$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\quad つまり\quad y=-x-\frac{1}{4}$$

これと l との交点が求める Q の座標である．よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{8},\ -\dfrac{13}{8}\right)}$

【別解】　P と Q の距離が最短となるのは，P における C の接線が l と平行になるときである．

C について $y'=2x$ より　$2x=1$　　$x=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ を通り，l と垂直な直線は　$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{4}$

つまり　$y=-x-\dfrac{1}{4}$

これと l との交点が求める Q の座標である．よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{8},\ -\dfrac{13}{8}\right)}$

したがって　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{11}{8}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{13}{8}+\dfrac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{2}}{8}}$

第12講　図形と方程式(2)

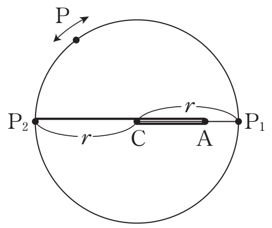
1 [1]　点Pが円 $x^2-2x+y^2-2y-18=0$ の上を動くとき，点A(4, 1)との距離APの最小値と最大値を求めよ．

$x^2-2x+y^2-2y-18=0$ より　$(x-1)^2+(y-1)^2=20$

この円の中心をC，半径を r とすると　C(1, 1)，$r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

AC＝3 より　AC＜r　よって，点Aは円の内部にある．

Aを通る円の直径の両端のうち，Cに関してAと同じ側にある点をP_1，Aと反対側にある点をP_2とする．



APの 最小値は　$AP_1=r-AC=\mathbf{2\sqrt{5}-3}$

最大値は　$AP_2=r+AC=\mathbf{2\sqrt{5}+3}$

1 [2]　原点Oを中心とする半径2の円に，点P(4, 0)から引いた2本の接線の接点のうち，第1象限にある点をA，残りの点をBとする．直線ABが x 軸と交わる点をCとする．Cから直線APに引いた垂線とAPの交点をDとする．

(1)　線分APの長さを求めよ．

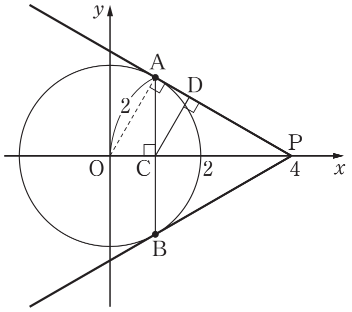
(2)　線分CDの長さを求めよ．

(3)　3点P，C，Dを通る円の方程式を求めよ．

(1)　三平方の定理により　$AP=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{16-4}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

【別解】　方べきの定理により　$AP^2=2\times 6$　よって　$\mathbf{AP=2\sqrt{3}}$

(2)　図形の対称性より　AB⊥OP



△OAP∽△OCA より　OA：OC＝OP：OA

2：OC＝4：2　　OC＝1

よって　PC＝3

△OAP∽△CDP より　$CD=\frac{3}{4}OA=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(3)　△PCD は ∠D＝90° の直角三角形より，CPは求める円の直径である．

よって，その中心はCPの中点 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，半径は $\frac{1}{2}CP=\frac{3}{2}$

ゆえに，求める円の方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}}$

2 ［1］ k を定数とし，方程式 $x^2+y^2+3kx-ky-10k-20=0$ で表される座標平面内の円 C について，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C は k の値によらず，ある 2 つの定点を通る．この 2 点の座標を求めよ．

(2) k が変化するとき，円 C の面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ．

(1) C の式は　$(3x-y-10)k+x^2+y^2-20=0$　と変形できる．

これがすべての実数 k で成立するのは　$3x-y-10=0$　かつ　$x^2+y^2-20=0$　のとき．

これらより y を消去すると

$x^2+(3x-10)^2-20=0$　　$x^2-6x+8=0$　　$(x-2)(x-4)=0$

よって　$(x,\ y)=(2,\ -4),\ (4,\ 2)$

したがって，円 C は k の値によらず定点 **(2，−4)**，**(4，2)** を通る．

(2) $C:\left(x+\dfrac{3}{2}k\right)^2+\left(y-\dfrac{k}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}k^2+10k+20$

よって，円 C の面積は　$S=\dfrac{5}{2}(k^2+4k+8)\pi=\dfrac{5}{2}\pi\{(k+2)^2+4\}$

したがって　$\boldsymbol{k=-2}$　のとき S は　最小値　$\boldsymbol{10\pi}$　をとる．

【別解】 C は定点 (2，−4)，(4，2) を通る円である．この 2 点を通る最も小さい円はこの 2 点を直径の両端とするものである．その中心は 2 点の中点 (3，−1)，半径は $\sqrt{10}$

よって，その方程式は　$(x-3)^2+(y+1)^2=10$　つまり　$x^2+y^2-6x+2y=0$

これを　$x^2+y^2+3kx-ky-10k-20=0$　と比較すると，$k=-2$ である．

したがって　$\boldsymbol{k=-2}$　のとき円 C の面積 S は　最小値　$\boldsymbol{10\pi}$　をとる．

2 ［2］ 直線 $l:(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$ が，曲線 $C:x^2+y^2=r^2$（$r>0,\ x\geqq 0$）に接する．

(1) r の値を求めよ．

(2) 点 A$(a,\ 1)$ が直線 l 上の点であるとき，a の値を求めよ．また，点 A から曲線 C に引いた l 以外の接線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 つの接線 l，m で囲まれた図形の面積を求めよ．

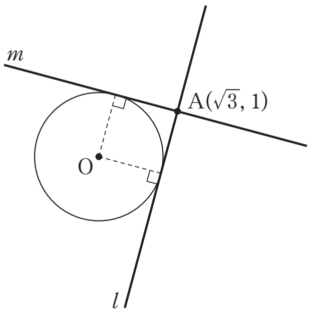
(1) $l:(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-4=0$ と円 $x^2+y^2=r^2$ の中心 O(0，0) との距離が半径 r と等しい．

よって　$\dfrac{|-4|}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}}=r$　　ゆえに　$\boldsymbol{r=\sqrt{2}}$

l の y 切片は負，x 切片は正，すなわち円と l の接点は第 4 象限に存在するので，このとき l は曲線 C と接している．

(2) $(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=4$　に $(x,\ y)=(a,\ 1)$ を代入して

$(1+\sqrt{3})a+1-\sqrt{3}=4$　　よって　$a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{1+\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$



$A(\sqrt{3}, 1)$ を通る接線 m は y 軸に平行でなく，第1象限で円と接するので

$y=k(x-\sqrt{3})+1$　つまり　$y=kx-\sqrt{3}k+1$　とおける．

変形して　$kx-y-\sqrt{3}k+1=0$　これと円 $x^2+y^2=2$ が接するので

$$\frac{|-\sqrt{3}k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}\qquad |\sqrt{3}k-1|=\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}$$

$$(\sqrt{3}k-1)^2=2(k^2+1)$$

$$k^2-2\sqrt{3}k-1=0\quad\cdots\cdots①$$

①の解のうち，1解が l の傾き　$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+2$　より，もう1解は解と係数の関係から　$k=\sqrt{3}-2$　である．

よって　m：$\boldsymbol{y=(\sqrt{3}-2)x+2\sqrt{3}-2}$

(3)　①より l と m の傾きの積は -1　よって　$l\perp m$

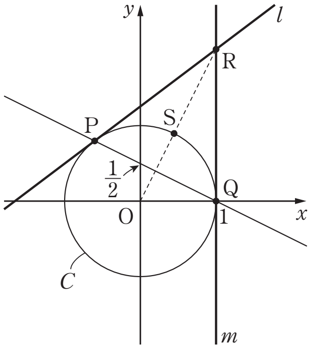
したがって，求める面積は　(正方形)$-\left(\dfrac{1}{4}円\right)=r^2-\dfrac{1}{4}r^2\pi=\boldsymbol{2-\dfrac{\pi}{2}}$

3　Oを原点とする座標平面上の円 C：$x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方をP，他方をQとする．点P，Qにおける円 C の接線をそれぞれ l，m とする．次の問いに答えよ．

(1)　P，Qの座標を求めよ．また，l と m の交点Rの座標を求めよ．

(2)　線分ORと C の交点をSとする．Sの座標を求めよ．また，△QRSの面積を求めよ．

(3)　∠PQS＝∠RQSであることを示せ．



(1)　C：$x^2+y^2=1$　と　$x+2y=1$　より x を消去して

$$(1-2y)^2+y^2=1\qquad 5y^2-4y=0\qquad y=0,\ \frac{4}{5}$$

よって　$\mathbf{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\mathbf{Q(1,\ 0)}$

P，Qにおける円 C の接線はそれぞれ

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1,\ x=1$$

よって　l：$3x-4y+5=0$　　m：$x=1$

したがって　$\mathbf{R(1,\ 2)}$

(2)　OR：$y=2x$　これと C：$x^2+y^2=1$　より y を消去して　$x^2+4x^2=1$　　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

図より　$\mathbf{S}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$　　△QRS$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}}$

(3)　PQ と OR の交点を M とすると，図形の対称性より M は PQ の中点であり，$\mathrm{OR}\perp\mathrm{PQ}$ である．

$\triangle\mathrm{OQM}\backsim\triangle\mathrm{ORQ}$ であり，$\mathrm{OR}=\sqrt{5}$ より　$\mathrm{OM}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって　$\mathrm{MS}=\mathrm{OS}-\mathrm{OM}=1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$

また　$\mathrm{SR}=\mathrm{OR}-\mathrm{OS}=\sqrt{5}-1$

したがって　$\mathrm{MS}:\mathrm{SR}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}:1$

一方　$\mathrm{QM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{OQ}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\mathrm{QR}=2$ より　$\mathrm{QM}:\mathrm{QR}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}:1$

よって　$\mathrm{MS}:\mathrm{SR}=\mathrm{QM}:\mathrm{QR}$　より　$\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$

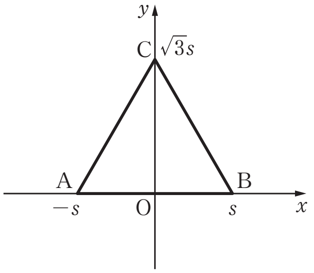
第13講　図形と方程式(3)

1 [1]　一辺の長さが $2s$ である正三角形 ABC の 3 つの頂点を $A(-s,\ 0)$，$B(s,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3}s)$ とする．$AP^2+BP^2+CP^2=t$ であるような点 P について，以下の問いに答えよ．

(1)　このような点 P が存在するための実数 s，t についての必要十分条件と，この条件の下での点 P の軌跡の方程式を求めよ．

(2)　点 P の軌跡が頂点 A を通る場合の s と t の関係式を求めよ．また，このときの点 P の軌跡を △ABC とともに図示せよ．

(1)　$P(x,\ y)$ とすると，$AP^2+BP^2+CP^2=t$　より



$$(x+s)^2+y^2+(x-s)^2+y^2+x^2+(y-\sqrt{3}s)^2=t$$

$$x^2+y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}sy+\frac{5s^2-t}{3}=0$$

$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2=\frac{t-4s^2}{3}\quad\cdots\cdots①$$

よって　$\dfrac{t-4s^2}{3}>0$　つまり　$t>4s^2$　のとき　中心 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)$　半径 $\sqrt{\dfrac{t-4s^2}{3}}$ の円

$\dfrac{t-4s^2}{3}=0$　つまり　$t=4s^2$　のとき　点 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)$

以上より，求める条件は　$\boldsymbol{t\geqq 4s^2>0}$　で，P の軌跡の方程式は

$t>4s^2>0$　のとき　$\boldsymbol{x^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2=\dfrac{t-4s^2}{3}}$

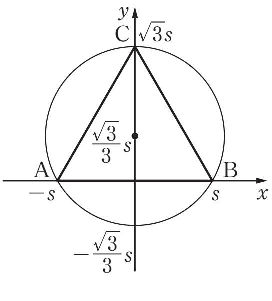
$t=4s^2>0$　のとき　$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)}$

(2)　点 A の座標を①に代入して　$s^2+\dfrac{s^2}{3}=\dfrac{t-4s^2}{3}$　　$\boldsymbol{t=8s^2}$

このとき①は $s>0$ より

中心 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)$　半径 $\sqrt{\dfrac{8s^2-4s^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{4s^2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}s$　の円である．

よって点 P の軌跡は下図．



1 ［2］　実数 a と b が $a+b=4$ を満たしながら変化する．このとき，放物線 $y=x^2+2ax+b$ の頂点の軌跡の方程式を求めよ．

$a+b=4$ より　$b=4-a$　　よって　$y=x^2+2ax+4-a=(x+a)^2-a^2-a+4$

よって頂点の座標は $(-a,\ -a^2-a+4)$　これを $(X,\ Y)$ とおくと

$X=-a$　……①，　$Y=-a^2-a+4$　……②

①より　$a=-X$　これを②に代入して　$Y=-X^2+X+4$

よって求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y=-x^2+x+4}$

2　座標平面上の3点 A(0, 0)，B(3, 0)，C(1, 3) に対して

・　線分 BC を 1：k に内分する点を D（k は正の実数）
・　2点 A，D を通る直線を l
・　点 C を中心とし直線 l に接する円を S
・　円 S と直線 l の接点を P

とする．

(1)　点 D の座標，直線 l の方程式，円 S の半径 r の値を，それぞれ k を用いて表せ．

(2)　k がすべての正の値をとって変化するとき，円 S の半径 r がとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　k がすべての正の値をとって変化するとき，点 P が描く軌跡の方程式とその範囲を求めよ．

(1)　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{3k+1}{k+1},\ \dfrac{3}{k+1}}\right)$　　l : $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{3k+1}x}$

$k>0$ より　$r=\dfrac{|3-(3k+1)\cdot 3|}{\sqrt{9+(3k+1)^2}}=\boldsymbol{\dfrac{9k}{\sqrt{9k^2+6k+10}}}$

(2)　$k>0$ より　$r=\dfrac{9}{\sqrt{9+\dfrac{6}{k}+\dfrac{10}{k^2}}}$　……①　　$\dfrac{1}{k}=X$ とおくと　$k>0$ より　$X>0$

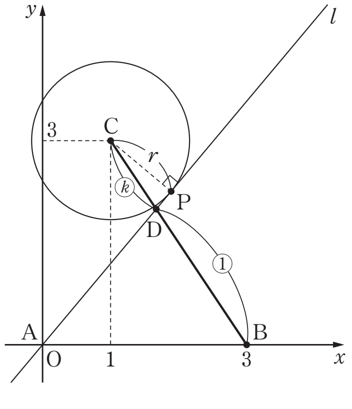
(①の分母)$=\sqrt{10X^2+6X+9}>\sqrt{9}=3$　　よって　$r<\dfrac{9}{3}$　　したがって　$\boldsymbol{0<r<3}$

(3)　$\angle\mathrm{APC}=90^\circ$　かつ　A，C は定点より，
点 P は AC を直径とする円上を動く．

その中心は AC の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　より

求める方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}}$



P は l 上の点であり，l が A を定点として直線 AB から

直線ACまで動くことにより，図からPはこの円の　$\boldsymbol{1<x\leqq\frac{1+\sqrt{10}}{2}}$　の範囲を動く.

3　3点P(4，−5)，Q(0，3)，R(7，4)を通る円を C とする.

(1)　円 C の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$　とおいて，a，b，c の値を求めよ.

(2)　点S(−4，0)を通り，傾き m の直線を l とする．直線 l が円 C と2つの交点をもつような傾き m の範囲を求めよ.

(3)　傾き m が(2)の範囲にあるとき，直線 l と円 C の2つの交点の中点の軌跡はある円の一部分であることを示し，その軌跡を求めよ.

---

(1)　C の式にP，Q，Rの座標を代入して

$4a-5b+c=-41$，$3b+c=-9$，$7a+4b+c=-65$　　よって　$\boldsymbol{a=-8,\ b=0,\ c=-9}$

(2)　$C:x^2+y^2-8x-9=0$　つまり　$(x-4)^2+y^2=25$　　$l:y=m(x+4)$

これらより　$(x-4)^2+m^2(x+4)^2=25$

$(m^2+1)x^2+2(4m^2-4)x+16m^2-9=0$　……①

判別式を D とすると

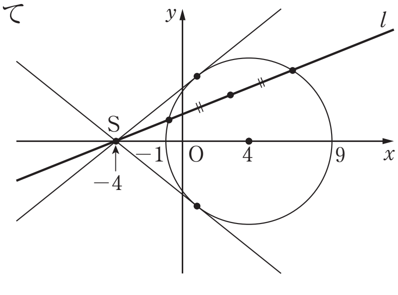
$$\frac{D}{4}=(4m^2-4)^2-(m^2+1)(16m^2-9)=-39m^2+25>0$$

よって　$\boldsymbol{-\frac{5}{\sqrt{39}}<m<\frac{5}{\sqrt{39}}}$

(3)　(2)のとき　①の2解を α，β とすると，C と l の2交点の中点の座標 $(X,\ Y)$ は

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{4m^2-4}{m^2+1}=-4+\frac{8}{m^2+1}\quad\cdots\cdots②\qquad Y=m(X+4)\quad\cdots\cdots③$$

$X\neq-4$ より　③から　$m=\dfrac{Y}{X+4}$　これを②に代入して



$$X+4=\frac{8}{\left(\frac{Y}{X+4}\right)^2+1}\qquad X+4=\frac{8(X+4)^2}{Y^2+(X+4)^2}$$

$Y^2+(X+4)^2=8(X+4)$　　よって　$X^2+Y^2=16$

また，$m^2<\dfrac{25}{39}$ より

$$m^2+1<\frac{64}{39}\qquad\frac{m^2+1}{8}<\frac{8}{39}\qquad\frac{39}{8}<\frac{8}{m^2+1}\leqq8\qquad\frac{7}{8}<X\leqq4$$

よって求める軌跡は　**円** $\boldsymbol{x^2+y^2=16\ \left(\frac{7}{8}<x\leqq4\right)}$

【別解】　l と C の2交点の中点をM，円 C の中心をC′とすると，∠C′MS＝90°より

Mの軌跡はC′Sの中点(0，0)を中心とする半径 $\frac{1}{2}$C′S＝4の円である.

また，l が C と接するとき　$m=\pm\dfrac{5}{\sqrt{39}}$

$m=\dfrac{5}{\sqrt{39}}$　のとき　$l: y=\dfrac{5}{\sqrt{39}}(x+4)$

これと垂直で C′ を通る直線は　$y=-\dfrac{\sqrt{39}}{5}(x-4)$

この 2 直線の交点の x 座標は　$x=\dfrac{7}{8}$

よって図より，求める軌跡は　**円 $x^2+y^2=16$　$\left(\dfrac{7}{8}<x\leqq 4\right)$**

第14講　図形と方程式(4)

1 [1]　a, b を正の実数とする．実数 x に対し，次の命題が成り立つような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

$$|x-a|<b \implies |x-b|<a$$

$|x-a|<b$ より　$-b<x-a<b$　　よって　$a-b<x<a+b$

$|x-b|<a$ より　$-a<x-b<a$　　よって　$b-a<x<a+b$

よって与えられた命題は　$a-b<x<a+b \implies b-a<x<a+b$

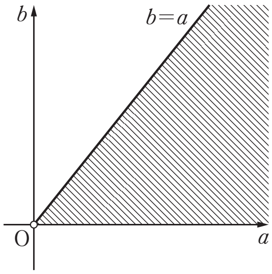
と同値である．したがって，これが真であるための条件は，

$a>0$, $b>0$ であることから

$b-a\leqq a-b$　　つまり　$b\leqq a$　である．

したがって，求める領域は右図斜線部分

（境界は直線 $b=a$ 上の $a>0$ の部分のみ含み，他は含まない）．



1 [2]　不等式 $x^2+y^2+4x\leqq0$ の表す領域を A，不等式 $x^2+y^2-2y\leqq0$ を表す領域を B とする．次の問いに答えよ．

(1)　領域 A の境界線と領域 B の境界線の共有点の座標を求めよ．

(2)　和集合 $A\cup B$ を座標平面上に図示せよ．

(3)　θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ を満たす実数とする．和集合 $A\cup B$ の面積を θ を用いて表せ．

(1)　A, B の境界を表す方程式はそれぞれ　$x^2+y^2+4x=0$ ……①，$x^2+y^2-2y=0$ ……②

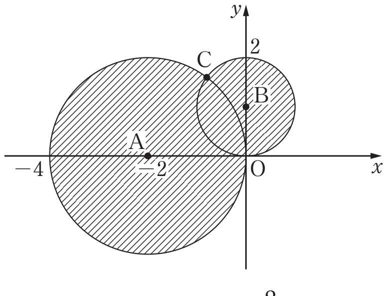
①－②より　$y=-2x$　これを①に代入して　$x^2+4x^2+4x=0$　　$x=0,\ -\dfrac{4}{5}$

よって求める共有点の座標は　$\mathbf{(0,\ 0)}$，$\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

(2)　点の座標を A$(-2,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

とすると

和集合 $A\cup B$ は右図斜線部分（境界含む）．



(3)　線分 AC の傾きは　$\dfrac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}+2}=\dfrac{8}{-4+10}=\dfrac{4}{3}$　　線分 BC の傾きは　$\dfrac{1-\frac{8}{5}}{\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

よって　AC⊥BC　より　BC，AC はそれぞれ円 A，円 B の接線である．

また，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　これは　AC の傾きと等しい．

ゆえに　$\angle\mathrm{OAC}=\theta$　より　$\angle\mathrm{OBC}=\pi-\theta$

したがって求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot(2\pi-\theta)+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\{2\pi-(\pi-\theta)\}+(\text{四角形 OACB})=\boldsymbol{\frac{9}{2}\pi-\frac{3}{2}\theta+2}$$

2　次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x^2+y^2\leqq 25,\ (y-2x-10)(y+x+5)\leqq 0$$

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．また，$M,\ m$ を与える D の点を求めよ．

(3)　a を実数とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ が点 $(-3,\ 4)$ で最大値をとるような a の値の範囲を求めよ．

(1)　$(y-2x-10)(y+x+5)\leqq 0$　より

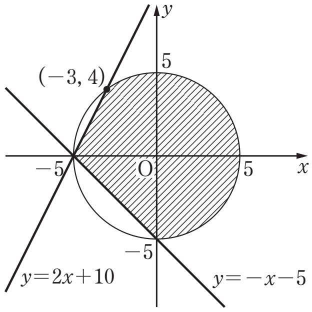
$$\begin{cases} y\geqq 2x+10 \\ y\leqq -x-5 \end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases} y\leqq 2x+10 \\ y\geqq -x-5 \end{cases}$$

円 $C：x^2+y^2=25$ と

直線 $y=2x+10$ の交点は　$(-5,\ 0)$，$(-3,\ 4)$

　　$y=-x-5$ の交点は　$(-5,\ 0)$，$(0,\ -5)$

よって領域 D は右図斜線部分（境界含む）．



(2)　$x+2y=k$ とおき，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$（傾き $-\frac{1}{2}$ の直線）……①　が領域 D と共有点をもつときの y 切片 $\frac{k}{2}$ の最大，最小を考える．

最大となるのは①が円 C と第一象限で接するとき．

よって　$\frac{|-k|}{\sqrt{1+4}}=5$　より　$k=5\sqrt{5}$

このとき①は　$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5\sqrt{5}}{2}$　　これと垂直で C の中心 O を通る直線 $y=2x$ との交点を求めて，k は $\boldsymbol{(x,\ y)=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})}$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{M=5\sqrt{5}}$** をとる．

最小となるのは①が点 $(0,\ -5)$ を通るとき．

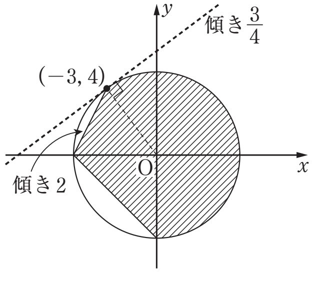
よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -5)}$ のとき　**最小値 $\boldsymbol{m=-10}$**

(3)　$ax+y=l$ とおき，直線 $y=-ax+l$　……②　の傾き $-a$ について考える．

点 $(-3,\ 4)$ における C の接線の傾きは　$\frac{3}{4}$

よって　$\frac{3}{4}\leqq -a\leqq 2$　であればよい．

したがって　$\boldsymbol{-2\leqq a\leqq -\frac{3}{4}}$



3　斜辺の長さが a，面積が b である直角三角形が存在するとき，座標平面上の点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

直角をはさむ2辺の長さを x，y とすると，

$x^2+y^2=a^2$　……①　　$\dfrac{1}{2}xy=b$　……②

②より　$xy=2b$

①より　$(x+y)^2-2xy=a^2$　　$(x+y)^2=4b+a^2$　　$x+y>0$ より　$x+y=\sqrt{a^2+4b}$

よって　x，y は t の2次方程式　$t^2-\sqrt{a^2+4b}\,t+2b=0$　の2解である．

$f(t)=t^2-\sqrt{a^2+4b}\,t+2b$　とおくと，$f(0)=2b>0$，軸 $t=\dfrac{\sqrt{a^2+4b}}{2}>0$

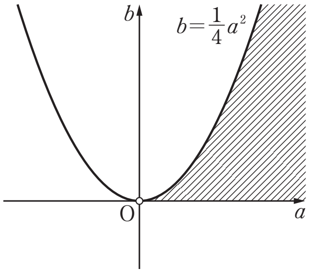
よって　$f(t)=0$ が正の2実数解をもつ条件は　判別式 $D\geqq 0$

$a^2+4b-4\cdot 2b\geqq 0$　　$b\leqq\dfrac{1}{4}a^2$

これと　$a>0$，$b>0$ より　求める範囲は右図斜線部分

（境界は直線 $b=\dfrac{1}{4}a^2$ 上を含むが，a 軸上および

原点は含まない）．



第15講　微分法・積分法(1)

1　a，b を正の実数とする．3次関数 $f(x)=ax(x-b)^2$ は $f(4)=27$ を満たし，$0<x<4$ において極大値2をもつ．a，b の値を求めよ．

$f(x)=ax(x-b)^2=a(x^3-2bx^2+b^2x)$

　$f(4)=27$　より　$4a(4-b)^2=27$　……①

$f'(x)=a(3x^2-4bx+b^2)=a(3x-b)(x-b)$

$a>0$，$b>0$ より　$f(x)$ の増減は右表．

x	$\cdots$	$\frac{b}{3}$	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗
		↑ 極大		↑ 極小	

よって，極大値の条件より　$0<\dfrac{b}{3}<4$　……②　　$f\left(\dfrac{b}{3}\right)=2$　……③

②より　$0<b<12$

③より　$a\cdot\dfrac{b}{3}\left(\dfrac{b}{3}-b\right)^2=2$　　$\dfrac{4ab^3}{27}=2$　　$b>0$ より　$4a=\dfrac{54}{b^3}$

これと　①より　$\dfrac{54}{b^3}(4-b)^2=27$　　$b^3-2b^2+16b-32=0$

$(b-2)(b^2+16)=0$　よって　$\boldsymbol{b=2}$（②を満たす）　このとき　$\boldsymbol{a=\dfrac{27}{16}}$

2　k を実数とする．3次関数 $f(x)=-x^3+kx^2+kx+1$ が $x=\alpha$ で極小値をとり，$x=\beta$ で極大値をとる．3点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta,\ f(\alpha))$ が $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を k を用いて表せ．

(2)　k の値を求めよ．

(1)　$f(x)=-x^3+kx^2+kx+1$　より　$f'(x)=-3x^2+2kx+k$

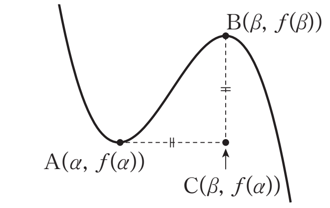
$f(x)$ が $x=\alpha$ で極小，$x=\beta$ で極大となるので，$f'(x)=0$ は $x=\alpha$，β（$\alpha<\beta$）を2解にもつ2次方程式である．

判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=k^2+3k>0$ より　$k(k+3)>0$　　$k<-3$，$0<k$　……①

また，解と係数の関係から　$\boldsymbol{\alpha+\beta=\dfrac{2k}{3}}$，$\boldsymbol{\alpha\beta=-\dfrac{k}{3}}$

(2)　AC＝BC より



$\beta-\alpha=f(\beta)-f(\alpha)$

$=-(\beta^3-\alpha^3)+k(\beta^2-\alpha^2)+k(\beta-\alpha)$

$=(\beta-\alpha)\{-(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+k(\beta+\alpha)+k\}$

$\beta-\alpha\neq0$ より　$1=-(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+k(\alpha+\beta)+k$

$=-\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+k(\alpha+\beta)+k$

$=-\left\{\left(\dfrac{2k}{3}\right)^2+\dfrac{k}{3}\right\}+k\cdot\dfrac{2k}{3}+k$

$2k^2+6k-9=0$　　よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}}$（ともに①を満たす）

3　x の関数 $f(x)=8^x+8^{-x}-9(4^x+4^{-x})+27(2^x+2^{-x})-26$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3)　t が(2)で求めた範囲を動くとき，関数 $y=g(t)$ の増減を調べよ．

(4)　$x\geqq0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ のとき

$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$$

$$8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}(2^x+2^{-x})=t^3-3t$$

よって　$g(t)=(t^3-3t)-9(t^2-2)+27t-26=\boldsymbol{t^3-9t^2+24t-8}$

(2)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから（相加平均）≧（相乗平均）により

$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$　　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=0$ のとき

よって　$\boldsymbol{t\geqq2}$

(3)　$g'(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$

よって　$g(t)$ の増減は右表のようになる．

t	2	…	4	…
$g'(t)$	0	−	0	+
$g(t)$	12	↘	8	↗

(4)　$x\geqq0$ のとき $t=2^x+2^{-x}$ は増加関数であるから，$g(t)$ が最小となるときに $f(x)$ は最小となる．

$g(t)$ の最小値は $t=4$ のとき 8

$t=4$　より　$2^x+\dfrac{1}{2^x}=4$

$2^x=X$ とおくと　$X\geqq1$ となる X の値1つに対し，x の値は $x\geqq0$ において1つ対応する．

$X+\dfrac{1}{X}=4$　　$X^2-4X+1=0$　　$X\geqq1$ より　$X=2+\sqrt{3}$

よって　$2^x=2+\sqrt{3}$　より　$x=\log_2(2+\sqrt{3})$

したがって，$\boldsymbol{x=\log_2(2+\sqrt{3})}$ のとき**最小値 8**　をとる．

第 16 講　微分法・積分法(2)

1　a を定数とし，放物線 $y=-(x-a)^2+a+1$ を C とする．

(1)　放物線 $y=x^2$ と C が異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　a が(1)で求めた範囲にあるとし，$y=x^2$ と C の 2 つの共有点を P，Q とする．ただし，（P の x 座標）$<$（Q の x 座標）とする．P における C の接線の傾きを m，Q における C の接線の傾きを n とするとき，積 mn を a を用いて表せ．また，mn のとり得る値の範囲を求めよ．

(1)　$x^2=-(x-a)^2+a+1$　より　$2x^2-2ax+a^2-a-1=0$　……①

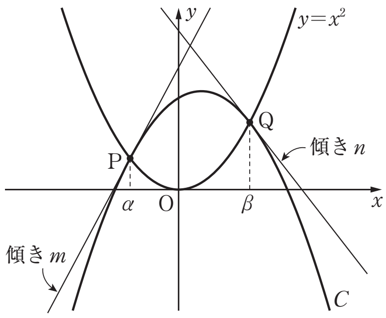
この式で　判別式 $D>0$ であればよい．

よって　$\dfrac{D}{4}=a^2-2(a^2-a-1)=-a^2+2a+2>0$　　$a^2-2a-2<0$

したがって　$\boldsymbol{1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3}}$

(2)　P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると，α，β は①の 2 解．よって，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}(a^2-a-1)$$



また，C において　$y'=-2x+2a$　より

$$mn=(-2\alpha+2a)(-2\beta+2a)$$
$$=4\alpha\beta-4a(\alpha+\beta)+4a^2$$
$$=2(a^2-a-1)-4a^2+4a^2=\boldsymbol{2a^2-2a-2}$$

さらに　$mn=2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}$　$(1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3})$　より　$\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}\leqq mn<2\sqrt{3}+4}$

2　2 つの放物線 $y=kx^2$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が直交する．このとき，定数 k の値と共有点の座標を求めよ．

$f(x)=kx^2$，$g(x)=-x^2+1$　とすると，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$kx^2=-x^2+1$　　$(k+1)x^2=1$　　共有点をもつので　$k+1>0$

$x^2=\dfrac{1}{k+1}$　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$　　$\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$，$\beta=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ とする．

$f'(x)=2kx$，$g'(x)=-2x$ であり，直交条件より

$f'(\alpha)\times g'(\alpha)=-1$　　$2k\alpha\times(-2\alpha)=-1$　　よって　$4k\alpha^2=1$　……①

$f'(\beta)\times g'(\beta)=-1$　　$2k\beta\times(-2\beta)=-1$　　よって　$4k\beta^2=1$　……②

$\alpha^2=\beta^2=\dfrac{1}{k+1}$ より　①，②はともに　$\dfrac{4k}{k+1}=1$　　$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{3}}$

したがって，共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)}$

3　3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における曲線の接線を l_t とする．

(1)　l_t の方程式を求めよ．

(2)　l_t が原点を通るような t の値がただ1つに定まるための a，b の条件を求めよ．

(3)　a，b が(2)の条件を満たすとき，点 $(a,\ b)$ が存在する領域を図示せよ．

$f(x)=x^3+ax^2+b$，$f'(x)=3x^2+2ax$

(1)　Pにおける曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は

$y=(3t^2+2at)(x-t)+t^3+at^2+b$　　よって　l_t：$\boldsymbol{y=(3t^2+2at)x-2t^3-at^2+b}$

(2)　l_t が原点を通るとき，$0=-2t^3-at^2+b$　この方程式の実数解がただ1つとなるときを考える．

$g(t)=-2t^3-at^2+b$ とおくと　$g'(t)=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

(i)　$-\dfrac{a}{3}=0$　つまり　$a=0$ のとき　$g'(t)=-6t^2\leqq 0$　より　$g(t)$ は単調減少

よって　$g(t)=0$ はただ1つの実数解をもち，適する．

(ii)　$a\neq 0$　のとき　$g(t)$ は $t=0$，$-\dfrac{a}{3}$ で極値をとる．

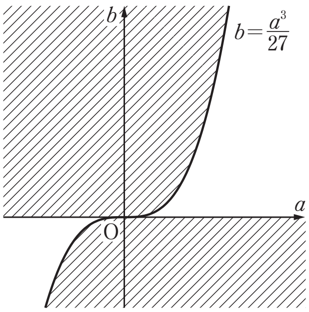
この2極値の積が正であればよい．

$$g(0)\times g\left(-\frac{a}{3}\right)>0 \quad より \quad b\left(b-\frac{a^3}{27}\right)>0$$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{a=0}$　**または**　$\boldsymbol{b\left(b-\dfrac{a^3}{27}\right)>0}$

(3)　求める領域は右図斜線部分．

ただし，境界は原点を含み，他は含まない．



第 17 講　微分法・積分法(3)

1 ［1］　次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^3 |x^2-x-2|dx$

$$\int_0^3 |x^2-x-2|dx=\int_0^2(-x^2+x+2)dx+\int_2^3(x^2-x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$$

$$=-\frac{8}{3}+2+4+\frac{1}{3}(27-8)-\frac{1}{2}(9-4)-2(3-2)=\mathbf{\frac{31}{6}}$$

1 ［2］　0 以上の実数 t に対し，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|dx$ とする．

(1)　$F(t)$ を t の関数として表せ．

(2)　関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ．

(1)　(i)　$1\leqq t$ のとき　$F(t)=\displaystyle\int_0^1(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^1=t^2-\frac{1}{3}$

(ii)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$F(t)=\displaystyle\int_0^t(-x^2+t^2)dx+\int_t^1(x^2-t^2)dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t+\left[\frac{1}{3}x^3-t^2x\right]_t^1$$

$$=\left(-\frac{1}{3}t^3+t^3\right)+\left(\frac{1}{3}-t^2\right)-\left(\frac{1}{3}t^3-t^3\right)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

よって　$\boldsymbol{F(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3} & (0\leqq t\leqq 1)\\[2mm] t^2-\dfrac{1}{3} & (1\leqq t)\end{cases}}$

(2)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$

よって増減は右表のようになる．

$1\leqq t$　のときはこの範囲で　$F(t)$ は単調増加．

よって　$F(t)$ が最小となる t の値は　$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$F'(t)$	0	$-$	0	$+$
$F(t)$		↘	最小値	↗

2　放物線 $C：y=x(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．
(1)　直線 $l：y=ax$ と C との交点で，原点とは異なる点の座標を求めよ．
(2)　C と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．
(3)　C と l とで囲まれた図形 D の面積を求めよ．
(4)　点 $(a,\ 0)$ を通り，図形 D の面積を2等分する直線の方程式を求めよ．

(1)　$x(x-a)=ax$　で $x\neq 0$ のとき　$x-a=a$　　$x=2a$
よって求める点の座標は　$\boldsymbol{(2a,\ 2a^2)}$

(2)　求める面積は　$-\int_0^a x(x-a)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{6}a^3}$

【別解】　$-\int_0^a x(x-a)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(a-0)^3\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}a^3}$

(3)　求める面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_0^{2a}\{ax-(x^2-ax)\}dx=\int_0^{2a}(-x^2+2ax)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2\right]_0^{2a}=\boldsymbol{\frac{4}{3}a^3}$$

【別解】　$S_1=\int_0^{2a}\{ax-(x^2-ax)\}dx=\int_0^{2a}(-x^2+2ax)dx=-\int_0^{2a}x(x-2a)dx$

$$=\frac{1}{6}(2a)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}a^3}$$

(4)　C と l，および直線 $x=a$ で囲まれた原点を含む方の図形の面積は

$$\int_0^a\{ax-(x^2-ax)\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3=\frac{1}{2}S_1$$

よって題意の直線の方程式は　$\boldsymbol{x=a}$

3　2つの放物線 $C_1：y=x^2+4$，$C_2：y=-x^2+4x$ について，次の問いに答えよ．
(1)　C_1 と C_2 の両方に接する2本の直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．
(2)　C_1 と，(1)における l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1)　C_1 で $y'=2x$　よって　$x=t$ における C_1 の接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2+4$　つまり　$y=2tx-t^2+4$　……①

C_2 で $y'=-2x+4$　よって　$x=s$ における C_2 の接線の方程式は

$y=(-2s+4)(x-s)-s^2+4s$　つまり　$y=(-2s+4)x+s^2$　……②

①と②が一致するとき

$2t=-2s+4$　かつ　$-t^2+4=s^2$　　これらより　$(s,\ t)=(0,\ 2),\ (2,\ 0)$

したがって，l_1 と l_2 は　$\boldsymbol{y=4x,\ y=4}$

(2)　l_1 と l_2 の交点の x 座標は　$x=1$

よって求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1(x^2+4-4)dx+\int_1^2(x^2+4-4x)dx$$

$$=\int_0^1x^2dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$\left(※\quad\int_1^2(x^2-4x+4)dx=\int_1^2(x-2)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2=-\frac{1}{3}(-1)^3=\frac{1}{3}\right)$$

第18講　微分法・積分法(4)

1　関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+2x & (x\leqq 2 \text{ のとき}) \\ x-2 & (x>2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されている．次の各問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　$a\leqq x\leqq a+2$ における $f(x)$ の最大値が $f(a+2)$ と等しくなるような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1)　$x\leqq 2$ のとき　$f'(x)=3x^2-6x+2$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$　　$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ とおく．

$x>2$ のとき　$f(x)$ は単調増加．

よって，$f(x)$ は連続であるから増減は右表．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗	0	↗
		↑ 極大		↑ 極小			

ここで　$f(x)\div f'(x)$ を計算することにより

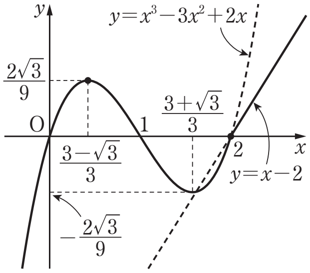
$$f(x)=(3x^2-6x+2)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$f(\alpha)=(3\alpha^2-6\alpha+2)\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f(\beta)=-\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

よって，グラフは右図．



(2)　変域の幅が2であることを考慮し，$f(x)$ の最大値が $f(a+2)$ となるときを考える．

(i)　$a+2\leqq\alpha$　つまり　$a\leqq-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ のとき　$a\leqq x\leqq a+2$　においては

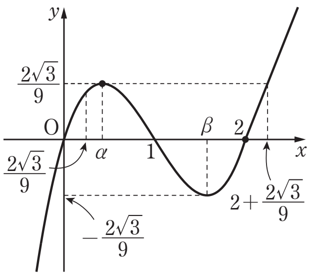
$x=a+2$ で最大値をとる．

(ii)　$x-2=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　となる x を求めると　$x=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$2+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\leqq a+2$　のとき　$a\geqq\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

ここで　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}-\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}-9}{9}<0$　より　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}<\alpha$

よって　$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ のとき　$x=\alpha$，$a+2$ で最大値をとり，



$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}<a$ のとき　$x=a+2$ で最大値をとる．また，$\alpha<a+2<2+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ のときは $x=a+2$ では最大値とならず不適．

(i)，(ii)より求める a の範囲は　$\boldsymbol{a\leqq-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\leqq a}$

2 定数 $a\ (a\neq 1)$ に対し，$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ とする．

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解を a を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ．

(1) $f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=0$

$(x-1)^2(x-a)=0$　　よって　$\boldsymbol{x=1,\ a}$

(2) $f'(x)=3x^2-2(a+2)x+(2a+1)=(x-1)\{3x-(2a+1)\}$

$f'(x)=0$ となるのは　$x=1,\ \dfrac{2a+1}{3}$

$\dfrac{2a+1}{3}<1$　つまり

$a<1$ のとき，極大値　$f\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)=\left(\dfrac{2a-2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1-a}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{4(a-1)^3}{27}}$　　**極小値　0**

$1<a$ のとき，極大値　$f(1)=\mathbf{0}$　　**極小値**　$\boldsymbol{-\dfrac{4(a-1)^3}{27}}$

(3) 求める図形の面積を S とすると

$a<1$ のとき　$S=\displaystyle\int_a^1(x-1)^2(x-a)dx$

$$=\int_a^1(x-1)^2\{(x-1)-(a-1)\}dx$$

$$=\int_a^1\{(x-1)^3-(a-1)(x-1)^2\}dx$$

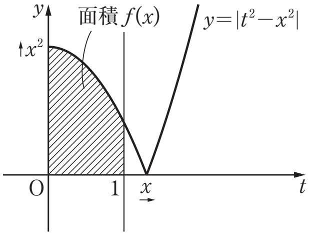
$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-(a-1)\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\right]_a^1$$

$$=-\frac{1}{4}(a-1)^4+\frac{1}{3}(a-1)^4=\frac{1}{12}(a-1)^4$$

$1<a$ のとき　$S=-\displaystyle\int_1^a(x-1)^2(x-a)dx=\int_a^1(x-1)^2(x-a)dx=\frac{1}{12}(a-1)^4$

よって，求める図形の面積は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{12}(a-1)^4}$

3　関数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|dt$ の最小値を求めよ．



$f(x)=f(-x)$ より　$f(x)$ は偶関数．よって　$x \geqq 0$ で考える．

$x>1$ のときは右図より　$f(x)$ は単調増加である．

よって　$0 \leqq x \leqq 1$ のときを考える．

$$f(x)=\int_0^x (-t^2+x^2)dt+\int_x^1 (t^2-x^2)dt$$

$$=\left[-\frac{t^3}{3}+x^2t\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-x^2t\right]_x^1$$

$$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=4x^2-2x=2x(2x-1)$$

よって増減は右表．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

↑
最小値

以上より，最小値は　$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

第19講　ベクトル(1)

1 ［1］ 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ と $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たしている．

(1) $|\vec{a}|=k$ とするとき，$|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，$|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$　より

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$　　$k^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$　……①

$|2\vec{a}-\vec{b}|=2$　より

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4$　　$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$　　$4k^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$　……②

①×2−②より　$-2k^2+|\vec{b}|^2=6$　　よって　$\boldsymbol{|\vec{b}|=\sqrt{2k^2+6}}$

①−②より　$-3k^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　よって　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3k^2+1}{2}}$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{4}$

つまり　$\dfrac{3k^2+1}{2}=k\times\sqrt{2k^2+6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(3k^2+1)^2=4k^2(k^2+3)$　　$5k^4-6k^2+1=0$　　$(5k^2-1)(k^2-1)=0$

$k^2=1,\ \dfrac{1}{5}$　　$k>0$ より　$k=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$k=1$ のとき　$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$　　$k=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき　$|\vec{a}|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $|\vec{b}|=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

1 ［2］ 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=1$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすように動く．
$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値，最小値とそのときの $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

$\vec{a}+2\vec{b}=\vec{x}$, $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{y}$ とおくと，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$　　$\vec{a}=\dfrac{1}{5}(\vec{x}+2\vec{y})$　　$\vec{b}=\dfrac{1}{5}(2\vec{x}-\vec{y})$

$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）とすると，$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta=\cos\theta$

$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{5}(3\vec{x}+\vec{y})$ より

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\dfrac{1}{5^2}|3\vec{x}+\vec{y}|^2=\dfrac{1}{5^2}(9|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2)=\dfrac{1}{5^2}(10+6\cos\theta)$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|$ は

$\theta=0$　つまり　$\vec{x}=\vec{y}$ のとき　**最大値**　$\dfrac{\sqrt{16}}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$　をとり，このとき

$\vec{a}=\dfrac{3}{5}\vec{x}$, $\vec{b}=\dfrac{1}{5}\vec{x}$ より　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\dfrac{3}{5}}$, $\boldsymbol{|\vec{b}|=\dfrac{1}{5}}$

$\theta=\pi$　つまり　$\vec{x}=-\vec{y}$ のとき　**最小値**　$\dfrac{\sqrt{4}}{5}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$　をとり，このとき

$\vec{a}=-\dfrac{1}{5}\vec{x}$, $\vec{b}=\dfrac{3}{5}\vec{x}$ より　$\boldsymbol{|\vec{a}|=\dfrac{1}{5}}$, $\boldsymbol{|\vec{b}|=\dfrac{3}{5}}$

2 座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円があり，その周上に異なる 3 点 A，B，C がある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として次の問いに答えよ． (1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ のとき，∠ACB の大きさを求めよ． (2) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=1$ のとき，∠AOB の大きさを求めよ． (3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ のとき，$\|\overrightarrow{AB}\|$ の値を求めよ． (4) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{3}$ のとき，∠ACB の大きさと △ABC の面積の最大値を求めよ．

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ より $\vec{a}=-\vec{b}$ よって AB は円 O の直径．したがって $\angle\mathbf{ACB=90°}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ より $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$

したがって $\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$ より $\angle\mathbf{AOB=120°}$

(3) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ $|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$ $1=1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1$

よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$

したがって ∠AOB＝120° 同様に ∠BOC＝∠COA＝120°

よって △ABC は正三角形である．

正弦定理より $\dfrac{AB}{\sin 60°}=2$ ゆえに $AB=|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|=\sqrt{\mathbf{3}}$

【別解】 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ $|\vec{a}+\vec{b}|=|-\vec{c}|=1$

よって(2)より ∠AOB＝120°

AB の中点を M とすれば $|\overrightarrow{AB}|=2AM=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\mathbf{3}}$

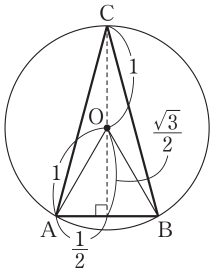
(4) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$ より $1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=3$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ よって ∠AOB＝60°

したがって $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\mathbf{30°}$ または $\angle ACB=\dfrac{1}{2}(360°-\angle AOB)=\mathbf{150°}$

△ABC の面積が最大となるのは，点 C が線分 AB の垂直二等分線上かつ AB に関して O と同じ側にあるときである．

△AOB が正三角形であることから，このときの面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\mathbf{2+\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$



3 鋭角三角形 ABC の外接円の中心を O，重心を G，線分 AB を 2：1 に内分する点を P とする．$\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$，$\angle BOC=\frac{5}{6}\pi$，$OA=1$　であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$　とするとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}$ の値を求めよ．また，三角形 OPG の面積を求めよ．

(1) $\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$，$\angle BOC=\frac{5}{6}\pi$　より　$\angle COA=\frac{\pi}{2}$　　したがって

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2}{3}\pi=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\frac{5}{6}\pi=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\qquad \boldsymbol{\vec{c}\cdot\vec{a}=0}$$

(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG}=\frac{1}{9}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}-1+2-\sqrt{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{3}}{18}}$$

また，$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\frac{1}{3^2}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$

$$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{3^2}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{3^2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{9}\quad より$$

$$\triangle OPG=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OG}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OG})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2-\sqrt{3}}{9}-\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{18}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2^2\times3^3}\{4(2-\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})\}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times3^2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{36}}$$

第 20 講　ベクトル(2)

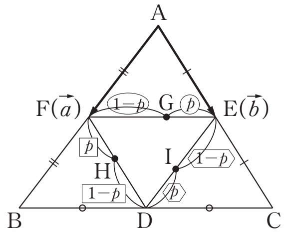
1　三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB のそれぞれの中点を D，E，F とする．また，p を $0<p<1$ を満たす数として，線分 EF，FD，DE をそれぞれ $p:(1-p)$ に内分する点を G，H，I とする．$\overrightarrow{AF}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AH}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，p を用いて表せ．

(2)　3 点 A，G，H が一直線上にあるときの p の値を求めよ．

(3)　p が(2)で求めた値であるとし，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=60^\circ$ であるとき，$|\overrightarrow{GH}|^2$ を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{p\vec{a}+(1-p)\vec{b}}$　　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FH}=\vec{a}+p\overrightarrow{FD}=\boldsymbol{\vec{a}+p\vec{b}}$



(2)　A，G，H が一直線上より　$p:(1-p)=1:p$

$p^2+p-1=0$　　$0<p<1$ より　$\boldsymbol{p=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(3)　$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$ より　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$　　$\angle BAC=60^\circ$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AG}=(1-p)\vec{a}+(2p-1)\vec{b}$

$|\overrightarrow{GH}|^2=(1-p)^2|\vec{a}|^2+2(1-p)(2p-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(2p-1)^2|\vec{b}|^2$

$=4(1-p)^2+2(1-p)(2p-1)+(2p-1)^2$

$=4p^2-6p+3$

$=(p^2+p-1)\times4-10p+7$

$=-10p+7$

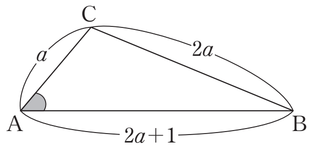
$=-10\times\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+7=\boldsymbol{12-5\sqrt{5}}$

2　三角形 ABC において，3 辺の長さは $AB=2a+1$，$BC=2a$，$CA=a$ であり，$\cos\angle BAC=\dfrac{11}{24}$ である．ただし，$a>0$ とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2)　辺 AB を 1：3 に内分する点を Q，辺 CA の垂直二等分線と線分 CQ，辺 CA との交点をそれぞれ P，R とおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(1)　余弦定理より　$4a^2=(2a+1)^2+a^2-2\times(2a+1)\times a\times\dfrac{11}{24}$

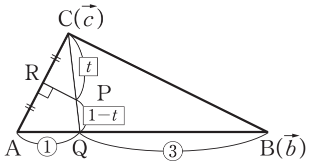


$10a^2-37a-12=0$　　$(a-4)(10a+3)=0$

$a>0$ より　$a=4$

よって　AB＝9，BC＝8，CA＝4

したがって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=9\times4\times\dfrac{11}{24}=\boldsymbol{\dfrac{33}{2}}$



(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，$|\vec{b}|=9$，$|\vec{c}|=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{33}{2}$

P は線分 QC 上の点より

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}+(1-t)\overrightarrow{AC}=\frac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{c}-\left\{\frac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}$$

$$=-\frac{t}{4}\vec{b}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{c}=\frac{1}{4}\{-t\vec{b}+(4t-2)\vec{c}\}$$

$\overrightarrow{PR}\perp\overrightarrow{AC}$　より　$\dfrac{1}{4}\{-t\vec{b}+(4t-2)\vec{c}\}\cdot\vec{c}=0$

$$-t\vec{b}\cdot\vec{c}+(4t-2)|\vec{c}|^2=0 \qquad -\frac{33}{2}t+(4t-2)\times16=0 \qquad t=\frac{64}{95}$$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\dfrac{16}{95}\overrightarrow{AB}+\dfrac{31}{95}\overrightarrow{AC}}$

【別解】　P は線分 QC 上の点より　$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}+(1-t)\overrightarrow{AC}=\dfrac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

また　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAR=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AR}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=8$　より

$$\left\{\frac{t}{4}\vec{b}+(1-t)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=8 \qquad \frac{t}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+(1-t)|\vec{c}|^2=8$$

$$\frac{33}{8}t+(1-t)\times16=8 \qquad t=\frac{64}{95}$$

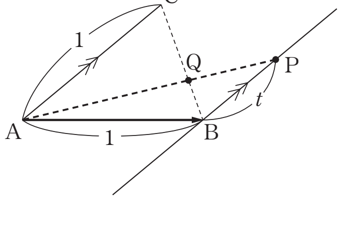
ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\dfrac{16}{95}\overrightarrow{AB}+\dfrac{31}{95}\overrightarrow{AC}}$

3　平面上の3点 A，B，C は同一直線上にないものとし，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=1$ とする．また，t を正の実数とし，平面上の点 P を $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と定め，線分 AP と BC の交点を Q とする．

(1)　$\overrightarrow{AQ}$ を t および $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(2)　三角形 ABP の面積を t と内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CP}$ かつ点 Q が線分 BC を 1：2 に内分するとき，三角形 BPQ の面積を求めよ．



(1)　Q は線分 AP 上の点より

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=k(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})=k\overrightarrow{AB}+kt\overrightarrow{AC}$　とおける．

Q は線分 BC 上の点より　$k+kt=1$　　$(1+t)k=1$

$t>0$ より　$k=\dfrac{1}{1+t}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}}$

（※　△QBP∽△QCA（相似比 t：1）より　BQ：CQ＝t：1

よって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{1+t}\overrightarrow{AB}+\dfrac{t}{1+t}\overrightarrow{AC}$）

(2)　辺ABは共通　かつ　AC∥BP　より　△ABC：△ABP＝AC：BP＝1：t

よって，$\triangle ABP=t\times\triangle ABC=t\times\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\boldsymbol{\dfrac{t}{2}\sqrt{1-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}}$

(3)　BQ：QC＝1：2＝$\dfrac{1}{2}$：1　より　$t=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CP}$　より

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}$

また，AQ：QP＝1：t＝1：$\dfrac{1}{2}$＝2：1

よって，$\triangle BPQ=\dfrac{1}{3}\triangle ABP=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{24}}$

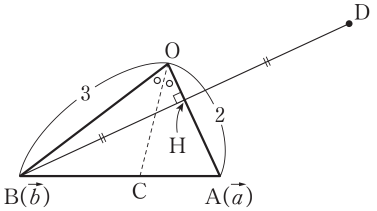
第21講　ベクトル(3)

1　平面上に互いに異なる3点O，A，Bがあり，それらは同一直線上にはないものとする．OA＝2，OB＝3とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とし，その内積を$\vec{a}\cdot\vec{b}=t$とおく．∠AOBの二等分線と線分ABとの交点をCとし，直線OAに関して点Bと対称な点をDとする．

(1)　$\overrightarrow{OC}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OD}$をt，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$となるとき，∠AOBと線分OCの長さを求めよ．



(1)　角の二等分線の性質より　AC：BC＝OA：OB＝2：3

よって　$\overrightarrow{\mathbf{OC}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

(2)　線分BDの中点をHとすると，実数kを用いて

$\overrightarrow{OH}=k\vec{a}$　とおける．

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BH}$より　　$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})=0$

$\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=0$　　$k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　　$k=\dfrac{t}{4}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{t}{4}\vec{a}$

したがって　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\dfrac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{10}(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(t\vec{a}-2\vec{b})=0$

$3t|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=0$

$12t-6t+2t^2-36=0$　　$t^2+3t-18=0$　　$t=3,\ -6$

$t=3$のとき　$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\times3}=\dfrac{1}{2}$　　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$

このとき　$|\overrightarrow{OC}|^2=\dfrac{1}{5^2}(9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{36\cdot3}{5^2}$　　$|\overrightarrow{OC}|=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

$t=-6$のとき　$\cos\angle AOB=-1$　　$\angle AOB=\pi$

よって3点O，A，Bが同一直線上となり不適．

以上より　$\angle\mathbf{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathbf{OC}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

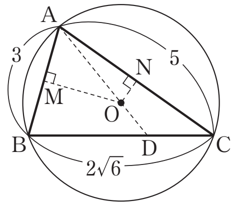
2　△ABC において，AB＝3，AC＝5，BC＝$2\sqrt{6}$ とする．△ABC の外心を O とし，O から辺 AB に下ろした垂線と AB の交点を M，O から辺 AC に下ろした垂線と AC の交点を N，直線 AO と辺 BC の交点を D とする．

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ．

(2) $|\overrightarrow{AO}|$ の値を求めよ．

(3) BD：DC＝s：$(1-s)$ $(0<s<1)$，$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$（$k$ は実数）とするとき，$\overrightarrow{MO}$ と $\overrightarrow{NO}$ をそれぞれ k，s，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=3\times5\times\dfrac{9+25-24}{2\times3\times5}=\mathbf{5}$

(2) $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　正弦定理より　$2OA=\dfrac{2\sqrt{6}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AO}|=OA=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) BD：DC＝s：$(1-s)$，$\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=k\{(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\boldsymbol{\left(k-ks-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+ks\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AN}=k\{(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{(k-ks)\overrightarrow{AB}+\left(ks-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}}$$

(4) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MO}$ より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MO}=\left(k-ks-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{AB}|^2+ks\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって　$18k-8ks-9=0$　……①

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{NO}$　より　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NO}=(k-ks)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(ks-\dfrac{1}{2}\right)|\overrightarrow{AC}|^2=0$

よって　$2k+8ks-5=0$　……②

①，②より　$k=\dfrac{7}{10}$，$s=\dfrac{9}{14}$

したがって　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{7}{10}\left\{\left(1-\dfrac{9}{14}\right)\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{14}\overrightarrow{AC}\right\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{20}\overrightarrow{AC}}$

3　△OABに対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　とする．また，△OABの面積をSとする．

(1)　$1\leqq s+t\leqq 3$ のとき，点Pの存在し得る領域の面積をSを用いて表せ．

(2)　$1\leqq s+2t\leqq 3$ のとき，点Pの存在し得る領域の面積をSを用いて表せ．

(1)　$s+t=k$ とおくと　$1\leqq k\leqq 3$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(s+t)\left(\dfrac{s}{s+t}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{s+t}\overrightarrow{OB}\right)$

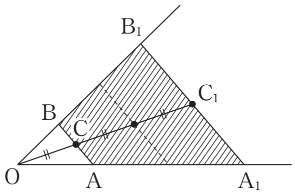
$\dfrac{s}{s+t}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{s+t}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$　とおくと，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OC}$　$(1\leqq k\leqq 3)$

よって　$\overrightarrow{OC_1}=3\overrightarrow{OC}$　となる点C_1をとると，

点Pは線分CC_1上を動く．

したがって　$\overrightarrow{OA_1}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB_1}=3\overrightarrow{OB}$　となる点A_1，B_1をとると，点Pは台形AA_1B_1Bの内部および周を動く．

ゆえに，求める面積は　$(3^2-1^2)S=\mathbf{8S}$



(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

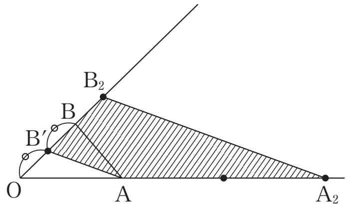
$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とおくと　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+2t\overrightarrow{OB'}$

よって　$2t=T$　とおくと

$1\leqq s+T\leqq 3$，$s\geqq 0$，$T\geqq 0$，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+T\overrightarrow{OB'}$

したがって(1)より求める面積は

$8\times\triangle OAB'=8\times\dfrac{1}{2}S=\mathbf{4S}$



第22講　ベクトル(4)

1　図のような1辺の長さを1とする立方体ABCD-EFGHを考える．線分AHと線分EDの交点をKとする．さらに，辺CGを3：1に内分する点をLとし，辺EFを$p:(1-p)$に内分する点をMとする．ただし，$0<p<1$である．また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{EA}}$とおく．

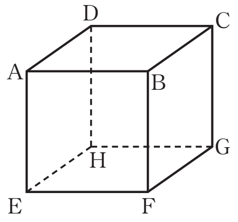
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$および$\overrightarrow{\mathrm{KM}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$と$\overrightarrow{\mathrm{KM}}$が垂直になるような$p$の値を求めよ．

(3)　直線KLと面EFGHを含む平面との交点をQとする．

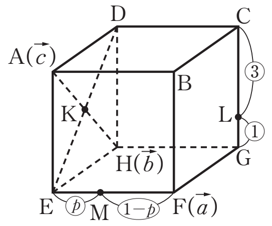
(i)　線分EQの長さを求めよ．

(ii)　△EKQの面積を求めよ．



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{EL}}-\overrightarrow{\mathrm{EK}}=\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{c}=\boldsymbol{\frac{1}{4}(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})}$

$\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\overrightarrow{\mathrm{EM}}-\overrightarrow{\mathrm{EK}}=p\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}=\boldsymbol{\frac{1}{2}(2p\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})}$

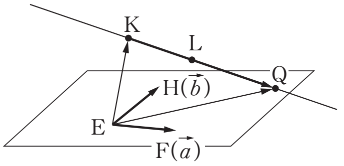


(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{KL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\frac{1}{8}(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\cdot(2p\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=0$

$8p-2+1=0$　　よって　$\boldsymbol{p=\frac{1}{8}}$

(3)　(i)　Qは直線KL上の点であり，$\overrightarrow{\mathrm{KL}}\parallel(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$であることより，実数$k$を用いて



$\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=\overrightarrow{\mathrm{EK}}+k(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+k(4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$=4k\vec{a}+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\left(-k+\frac{1}{2}\right)\vec{c}$

と表せる．

また，Qは平面EFGH上の点より　$-k+\frac{1}{2}=0$　　$k=\frac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(4\vec{a}+3\vec{b})$

$|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|^2=\frac{1}{2^2}|4\vec{a}+3\vec{b}|^2=\frac{1}{2^2}(16+9)=\frac{25}{2^2}$　　$\mathrm{EQ}=|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

(ii)　$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|^2=\frac{1}{2^2}|\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{2^2}(1+1)=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{EK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(4\vec{a}+3\vec{b})=\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{4}$

よって　$\triangle\mathrm{EKQ}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{EK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EQ}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{41}}{8}}$

2　座標空間内で，原点O，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(b_1,\ b_2,\ 0)$，$C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を頂点とする正四面体を考える．ただし，b_2 と c_3 は正とする．

(1)　b_1，b_2 および c_1，c_2，c_3 を求めよ．　(2)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

(3)　P は直線 BC 上の点で，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であるとする．P の座標を求めよ．また，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

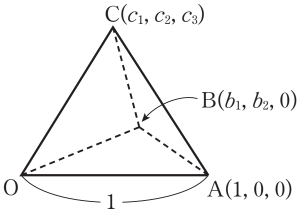
(1)　OB＝OA＝1 より　$b_1{}^2+b_2{}^2=1$　……①　　AB＝1 より　$(b_1-1)^2+b_2{}^2=1$　……②

①－②より　$2b_1=1$　よって　$\boldsymbol{b_1=\frac{1}{2}}$　　このとき　$b_2{}^2=\frac{3}{4}$　より　$\boldsymbol{b_2=\frac{\sqrt{3}}{2}}$　(>0)

このとき　CO＝1　より　$c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2=1$　……③

CA＝1　より　$(c_1-1)^2+c_2{}^2+c_3{}^2=1$　……④

CB＝1　より　$\left(c_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+c_3{}^2=1$　……⑤



③－④より　$2c_1-1=0$　　$\boldsymbol{c_1=\frac{1}{2}}$

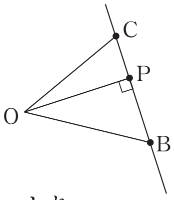
このとき③－⑤より　$\sqrt{3}\,c_2+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$　　$\boldsymbol{c_2=\frac{\sqrt{3}}{6}}$

よって③より　$c_3{}^2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$　　$\boldsymbol{c_3=\frac{\sqrt{6}}{3}}$　(>0)

(2)　$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$，　$\overrightarrow{BC}=\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times0+0\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$　　よって　$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

(3)　P は直線 BC 上の点より



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)+t\left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+t|\overrightarrow{BC}|^2=0$

ここで　$|\overrightarrow{BC}|=1$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\times\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{1}{2}$　より，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}+t=0$　　$t=\frac{1}{2}$

よって　$\boldsymbol{P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)}$　　また，$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

このとき　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$　より　$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

【別解】　(2)より $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$　かつ　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BC}$　　よって　平面 OAP$\perp\overrightarrow{BC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

3　座標空間内において，2点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 1)を端点とする線分OA，平面 $z=2$ 上に点 (0, 0, 2) を中心とする半径1の円周 C，および C 上の動点Pがあるとする．

(1)　直線PAと xy 平面との交点をA′とするとき，A′の軌跡の方程式を求めよ．

(2)　線分OA′が動いてできる xy 平面上の図形を描け．

(3)　(2)の図形の面積を求めよ．

(1)　円 C 上の点PはP$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2)$ と表せる．

直線PA上の点をQとすると実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ 0,\ 1)+t(\cos\theta-1,\ \sin\theta,\ 1)$$
$$=(1-t+t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1+t)$$

と表せ，z 成分が0のときの点が点A′である．

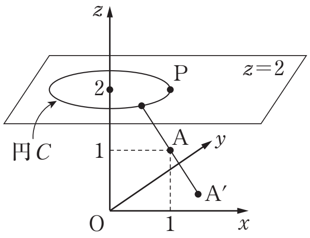
よって　$1+t=0$　　$t=-1$

このとき　A′$(2-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 0)$

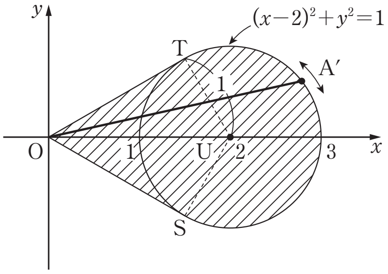
$X=2-\cos\theta$，$Y=-\sin\theta$ とおくと　$\cos\theta=2-X$，$\sin\theta=-Y$

これらと　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$(X-2)^2+Y^2=1$

よって，求めるA′の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{(x-2)^2+y^2=1,\ z=0}$



(2)　右図斜線部分．ただし，OT，OSは円 $(x-2)^2+y^2=1$ の接線であり，点Uはこの円の中心である．



(3)　$\cos\angle\mathrm{OUT}=\dfrac{\mathrm{UT}}{\mathrm{OU}}=\dfrac{1}{2}$　より　$\angle\mathrm{OUT}=\dfrac{\pi}{3}$

また　$\mathrm{OT}=\sqrt{3}$

よって，求める面積は　$\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times2+\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{4}{3}\pi=\boldsymbol{\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi}$

第23講　数列(1)

1　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 b，公比 r の等比数列 $\{b_n\}$ があり，数列 $\{c_n\}$ は $c_n=a_n+b_n$ により定まる数列とする．a，b，d，r がすべて正の整数で，$c_1=4$，$c_2=9$，$c_3=17$ のとき，以下の設問に答えよ．

(1)　a，b，d，r の値を求めよ．

(2)　数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1)　$a_n=a+(n-1)d$　　$b_n=b\cdot r^{n-1}$　より　$c_n=a_n+b_n=a+(n-1)d+b\cdot r^{n-1}$

$c_1=4$ より　$a+b=4$　……①　　$c_2=9$ より　$a+d+br=9$　……②

$c_3=17$ より　$a+2d+br^2=17$　……③

③$-2\times$②より　$br^2-2br-a=-1$

これに①すなわち　$a=4-b$　を代入して整理すると

$br^2-2br+b=3$　つまり　$b(r-1)^2=3$　　b，r は正の整数より　$b=3$，$r-1=1$ のみ．

このとき①より　$a=1$　これらと②より　$d=2$　　ゆえに　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ d=2,\ r=2}$

(2)　$c_n=1+(n-1)\cdot 2+3\cdot 2^{n-1}=2n-1+3\cdot 2^{n-1}$

よって，求める和は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}+\frac{3(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{n^2+3\cdot 2^n-3}$

2　a，b，c は相異なる実数で，$abc=-27$ を満たしている．さらに，a，b，c はこの順で等比数列であり，a，b，c の順序を適当に変えると等差数列になる．このとき，a，b，c の値を求めよ．

a，b，c はこの順で等比数列であることより　$b^2=ac$

これと $abc=-27$ より　$b^3=-27$　　よって　$b=-3$，$ac=9$

a，b，c の順列は $3!=6$（通り）あるが，例えば a，b，c がこの順に等差数列なら，c，b，a もこの順に等差数列である．よって，次の3通りの場合で考える．

(i)　a，b，c の順で等差数列　　(ii)　a，c，b の順で等差数列

(iii)　b，a，c の順で等差数列

(i)のとき　　$2b=a+c$　つまり　$a+c=-6$

これと $ac=9$ より　a，c は2次方程式　$t^2+6t+9=0$　の2解

解くと　$t=-3$（重解）よって　$a=c$ となり不適．

(ii)のとき　　$2c=a+b$　つまり　$a=2c+3$　　これと　$ac=9$ より

$c(2c+3)=9$　　$2c^2+3c-9=0$　　$(2c-3)(c+3)=0$　　$c=\dfrac{3}{2}$，-3

$c=-3$ のとき $a=-3$ となり不適．　$c=\dfrac{3}{2}$ のとき $a=6$

(iii)のとき　$2a=b+c$　つまり　$c=2a+3$　　よって(ii)より　$a=\frac{3}{2}$，$c=6$

以上より，求める a，b，c は　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(6,\ -3,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ -3,\ 6\right)}$

> **3**　数列 $\{a_n\}$ を初項3，公比3の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項11，公差8の等差数列とする．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を小さいものから順に並べて得られる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$　　$b_n=11+8(n-1)=8n+3$

$a_l=b_m$ とすると　$3^l=8m+3$　……①

$l=1$，2 のとき　$3^l\leqq9<11=b_1$　より　a_l は共通項ではない．

$l=m=3$ のとき　①は両辺ともに27となる．よって　$c_1=27$

$3^{l+1}=3\cdot3^l=3(8m+3)=8(3m+1)+1$

よって　(8の倍数)+3　の形とならない．したがって　3^{l+1} は共通項とならない．

$3^{l+2}=9\cdot3^l=9(8m+3)=8(9m+3)+3$

よって　(8の倍数)+3　の形となる．つまり　3^{l+2} は共通項となる．

したがって，a_l つまり 3^l が共通項のとき，$a_{l+2}=9a_l$ も共通項である．

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項27，公比9の等比数列である．

ゆえに　$c_n=27\cdot9^{n-1}=3\cdot9^n=\boldsymbol{3^{2n+1}}$

第24講　数列(2)

1 [1]　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)$ を求めよ.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)(i+n)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{-i^2+i+n(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n(n+1)\cdot n\right\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{-(2n+1)+3+6n\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

【別解】　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}k\right)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=2}^{n}k+\sum_{k=3}^{n}k+\cdots\cdots+\sum_{k=n}^{n}k$

$$=1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n$$
$$+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n$$
$$+3+\cdots\cdots+(n-1)+n$$
$$\vdots$$
$$+(n-1)+n$$
$$+n$$

$$=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots\cdots+n\cdot n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

1 [2]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}$ を求めよ.

$$\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2-1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[n-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(n-\frac{n}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n^2}{2n+1}}$$

[2] ［1］　数列 1，1＋3＋1，1＋3＋9＋3＋1，1＋3＋9＋27＋9＋3＋1，……
の第 n 項から第 $2n$ 項までの和を求めよ．ただし，n は自然数とする．

第 n 項は　$1+3+\cdots\cdots+3^{n-2}+3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots\cdots+3+1$

$$=2\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}-3^{n-1}=2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-3^{n-1}=3^n-3^{n-1}-1=2\cdot3^{n-1}-1$$

よって，求める和は　$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}(2\cdot3^{k-1}-1)=\frac{2\cdot3^{n-1}(3^{n+1}-1)}{3-1}-1\cdot(n+1)=\boldsymbol{3^{2n}-3^{n-1}-n-1}$

[2] ［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．$\log_{10}(S_n+1)=n$ が成り立っているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\log_{10}(S_n+1)=n$ より　$S_n+1=10^n$　　よって　$S_n=10^n-1$　　$a_1=S_1=10^1-1=9$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=10^n-1-(10^{n-1}-1)=10\cdot10^{n-1}-10^{n-1}=9\cdot10^{n-1}$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ．　したがって　$\boldsymbol{a_n=9\cdot10^{n-1}}$

[3]　n を正の整数，r を 0 および 1 でない実数とし，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}$，$T=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$，

$U=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を記号 Σ を用いずに r，n で表せ．

(2)　T を記号 Σ を用いずに S，r，n で表せ．ただし，S を必ず用いること．

(3)　U を記号 Σ を用いずに S，T，r，n で表せ．ただし，S と T を必ず用いること．

(1)　$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}=\boldsymbol{\frac{1-r^n}{1-r}}$

(2)　$T=1\cdot1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot r^{n-2}+n\cdot r^{n-1}$

$rT=\qquad 1\cdot r+2\cdot r^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot r^{n-2}+(n-1)\cdot r^{n-1}+n\cdot r^n$

よって　$(1-r)T=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}-n\cdot r^n=S-n\cdot r^n$　　ゆえに　$\boldsymbol{T=\dfrac{S-nr^n}{1-r}}$

(3)　$U=1^2\cdot1+2^2\cdot r+3^2\cdot r^2+\cdots\cdots+n^2\cdot r^{n-1}$

$rU=\qquad 1^2\cdot r+2^2\cdot r^2+\cdots\cdots+(n-1)^2\cdot r^{n-1}+n^2\cdot r^n$

よって　$(1-r)U=1+3r+5r^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot r^{n-1}-n^2\cdot r^n$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot r^{k-1}-n^2\cdot r^n=2\sum_{k=1}^{n}k\cdot r^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-n^2\cdot r^n$$

$$=2T-S-n^2\cdot r^n$$

ゆえに　$\boldsymbol{U=\dfrac{2T-S-n^2r^n}{1-r}}$

練習問題解答

第1講　2次方程式・2次関数(1)

a を正の定数とする．関数 $f(x)=|x-3a|(x-a)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$a=1$ のとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値は［ア］であり，最小値は $-$［イ］である．

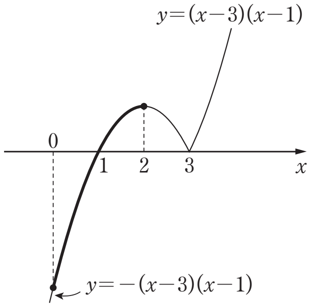
(2)　$0<a\leqq 1$ のとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2$ における最大値は

$0<a\leqq$［ウ］$-\sqrt{［エ］}$ のとき　［オ］a^2-［カ］$a+$［キ］

［ウ］$-\sqrt{［エ］}<a\leqq 1$ のとき　a^2

である．

(1)　$f(x)=|x-3|(x-1)=\begin{cases}(x-3)(x-1) & (x\geqq 3)\\ -(x-3)(x-1) & (x\leqq 3)\end{cases}$



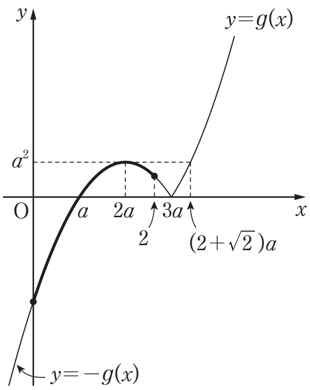
$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$f(x)=-(x-3)(x-1)=-(x-2)^2+1$

よって　**最大値 1**　($x=2$ のとき)

　　　　最小値 −3　($x=0$ のとき)

(2)　$g(x)=(x-a)(x-3a)$ とおくと

$f(x)=\begin{cases}-g(x) & (x\leqq 3a)\\ g(x) & (3a\leqq x)\end{cases}$　　$a>0$ より　$a<3a$



また，$f(2a)=a^2$ より $g(x)=a^2$ とすると

$x^2-4ax+3a^2=a^2$　　$x^2-4ax+2a^2=0$

$a>0$ より　$x=(2\pm\sqrt{2})a$

よって　$f(x)=a^2$ の2解は　$x=2a,\ (2+\sqrt{2})a$

さらに，$0<a\leqq 1$ より　$2a\leqq 2$

(i)　$2<(2+\sqrt{2})a$　つまり　$2-\sqrt{2}<a\leqq 1$ のとき

　　最大値　a^2

(ii)　$0<a\leqq 2-\sqrt{2}$ のとき

　　最大値　$g(2)=3a^2-8a+4$

以上より

$0<a\leqq \mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}$ のとき　最大値　$\mathbf{3}a^2-\mathbf{8}a+\mathbf{4}$

$\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}<a\leqq 1$ のとき　最大値　a^2

第2講　2次方程式・2次関数(2)

2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつような定数 a の範囲は　$a\leqq$ **ア** ， **イ** $\leqq a$ である．

$f(x)=2x^2-2ax+a$ とおくと，

$a\leqq$ **ア** のとき　$f(0)=$ **ウ** $\leqq 0$　　**イ** $\leqq a$ のとき　軸 $x=\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}\geqq 1$

である．よって $f(x)=0$ が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になる．

(2)　この方程式が $0\leqq x<\dfrac{2}{3}$ に少なくとも1つの実数解をもつような定数 a の範囲は

$a\leqq$ **カ** ，$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}<a$　である．

(1)　$2x^2-2ax+a=0$　……①　が実数解をもつのは，判別式 D について

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a\geqq 0$　のとき

$a(a-2)\geqq 0$　　よって　$a\leqq \mathbf{0}$，$\mathbf{2}\leqq a$

$a\leqq \mathbf{0}$ のとき　$f(0)=\boldsymbol{a}\leqq 0$

したがって，①は $x\leqq 0$，$0\leqq x$ に1解ずつもつ（$a=0$ のときは $x=0$ を重解にもつ）

$\mathbf{2}\leqq a$ のとき　軸 $x=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\geqq 1$　$f(1)=2-a\leqq 0$

したがって，①は $x\leqq 1$，$1\leqq x$ に1解ずつもつ　（$a=2$ のときは $x=1$ を重解にもつ）

よって，$f(x)=0$ が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になる．

(2)　①が $0\leqq x<\dfrac{2}{3}$ に少なくとも1つの実数解をもつためには，(1)より $a\leqq 0$，$2\leqq a$ であることが必要である．

$a\leqq 0$ のとき　$f(0)\leqq 0$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}=\dfrac{8-3a}{9}>0$　　よって題意を満たす．

$a\geqq 2$ のとき　(軸)$\geqq 1$ である．よって，$f(0)\geqq 0$　かつ　$f\left(\dfrac{2}{3}\right)<0$　であればよい．

$f(0)=a\geqq 2>0$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}<0$　より　$a>\dfrac{8}{3}$

以上より，題意を満たす a の値の範囲は　$a\leqq \mathbf{0}$，$\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}<a$

第3講　場合の数・確率(1)

1，2，3，4，5の5種類の数字を，同じ数字を繰り返し用いることを許して3桁の整数をつくるとき，できる3桁の整数は全部で **アイウ** 個ある．そのうち，3の倍数となるものの個数を求めたい．1，2，3，4，5の各数字を3で割った余りで分類すると，余りが0になる数は **エ** 個，余りが1になる数は **オ** 個，余りが2になる数は **カ** 個ある．3桁の整数の各位の数字が3で割った余りが0になる数のみで構成されているとき，その整数は **キ** 個あり，余りが1になる数のみ，余りが2になる数のみであるときは，その整数はともに **ク** 個ずつある．各位の数字が，3で割った余りが0，1，2になる数1つずつで構成されているときも考えると，3の倍数となるものは全部で **ケコ** 個ある．

3桁の整数は全部で　$5^3=\mathbf{125}$（個）できる．

1，2，3，4，5のうち

　3で割った余りが0であるものは3のみの**1**個

　3で割った余りが1であるものは1，4の**2**個

　3で割った余りが2であるものは2，5の**2**個

である．

3桁の整数の各位の数が

　3で割った余りが0になる数のみで構成されているとき，その整数は$1^3=\mathbf{1}$個　……①

　3で割った余りが1になる数のみで構成されているとき，その整数は$2^3=\mathbf{8}$個　……②

　3で割った余りが2になる数のみで構成されているとき，その整数は$2^3=\mathbf{8}$個　……③

である．

また，3で割った余りが0，1，2の数字1つずつで構成されているとき

　その数字の選び方が，$1\times2\times2=4$（通り）

　それらの順列を考えて　$3!=6$（通り）

よって　$4\times6=24$（個）　……④ある．

3の倍数となるものは，各位の数の和が3の倍数である．また和が3の倍数となるのは，それぞれの数字を3で割った余りの和が3の倍数となるときである．それは①～④の場合であり，それですべてである．

したがって，3の倍数となるものは　$1+8+8+24=\mathbf{41}$（個）ある．

第4講　場合の数・確率(2)

[1]　8名のクラスのうち，3名が男子学生，5名が女子学生とする．グループ研究を課すことになり，クラスを3つのグループに分けるとする．ただし，それぞれのグループの人数は2人以上，4人以下とする．

(1)　学生の性別に関係なくグループ分けをする方法は **アイウ** 通りある．

(2)　男子学生のみ，あるいは女子学生のみで構成されるグループを含まないグループ分けの方法は **エオカ** 通りある．

(1)　8人の学生を性別に関係なく3つのグループに分けるとき，その人数の組合せは(4，2，2)または(3，3，2)である．分け方はそれぞれ

$\dfrac{{}_8C_2\cdot{}_6C_2}{2}=210$（通り），　$\dfrac{{}_8C_3\cdot{}_5C_3}{2}=280$（通り）

よって，求める分け方の総数は　$210+280=\mathbf{490}$（通り）

(2)　3グループに分けるとき，男子は3人であるので，女子だけのグループができないようにするためには男子が3グループに1人ずつ入る必要がある．男子が1人ずつ入ることで3グループは区別される（グループA，B，Cとする）．そのグループの各々に女子が少なくとも1人入ればよい．女子のグループ分けは　$3^5=243$（通り）ある．ここで次のものを考える．

女子5人が全員同じグループに入るとき，どのグループに入るかで　3通り

女子が2つのグループに分かれて入るとき，どの2グループに入るかで　${}_3C_2=3$（通り）

女子がその2グループに分かれる方法が　$2^5-2=30$（通り）

よって　$3\times30=90$（通り）

よって，求める分け方の総数は　$243-(3+90)=\mathbf{150}$（通り）

[2]　7本の異なる映画を4回上映する場合を考える．ただし，1回の上映に1本の映画を上映し，上映する順番は区別しないこととする．

(1)　同じ映画が複数回上映されない場合，上映する場合の数は **キク** 通りある．

(2)　同じ映画を複数回上映してもよい場合，上映する場合の数は **ケコサ** 通りある．

(1)　${}_7C_4=\mathbf{35}$（通り）

(2)　4回とも同じ映画を上映する場合は　7通り．

4回の上映で2本の異なる映画を上映するとき，その映画の選び方が　${}_7C_2=21$（通り）

それぞれの映画を3回と1回上映する場合は，どちらが1回かで2通り，2回ずつ上映する場合は1通り．よって2本の映画を上映する場合は　$21\times3=63$（通り）

3本の映画を上映するときは，それらを2回，1回，1回上映するときのみ．よってその場合の数は　${}_7C_3\times3=105$（通り）

4本の映画を上映する場合は，(1)より35通り．

以上より，求める場合の数は　$7+63+105+35=\mathbf{210}$（通り）

第5講　場合の数・確率(3)

n を3以上の整数とする．1から n までの番号をつけた n 枚の札の組が2つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を1枚ずつ3回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする．取り出した札はもとに戻さないものとして，次の問いに答えよ．ただし，[オ] < [カ] とする．

(1)　$2n$ 枚の札をすべて区別すると，3回分の札の取り出し方は全部で

[ア]n([イ]$n-$[ウ])($n-$[エ]) 通りある．

(2)　$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めたい．

X_1，X_2，X_3 はすべて異なるので，X_1，X_2，X_3 の番号の決め方は

$\dfrac{n(n-\text{[オ]})(n-\text{[カ]})}{\text{[キ]}}$ 通りあり，小さい順に X_1，X_2，X_3 の番号と決まる．同じ番号の札が2枚ずつあることを考慮すると，$X_1<X_2<X_3$ となる確率は

$\dfrac{n-\text{[ク]}}{\text{[ケ]}(\text{[コ]}n-\text{[サ]})}$ である．

(1)　取り出した札をもとに戻さないので，3回分の札の取り出し方は

$${}_{2n}\mathrm{C}_3\times 3!={}_{2n}\mathrm{P}_3=2n(2n-1)(2n-2)=\mathbf{4}n(\mathbf{2}n-\mathbf{1})(n-\mathbf{1})\ \text{（通り）}$$

(2)　X_1，X_2，X_3 の番号の決め方は　${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-\mathbf{1})(n-\mathbf{2})}{\mathbf{6}}$（通り）

選んだ番号は小さい順に X_1，X_2，X_3 の番号となる．

同じ番号の札が2枚ずつあるので，X_1，X_2，X_3 の番号に対する札の決め方はそれぞれ2通りある．

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3\times 2^3}{{}_{2n}\mathrm{P}_3}=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 8}{4n(2n-1)(n-1)}=\frac{n-\mathbf{2}}{\mathbf{3}(\mathbf{2}n-\mathbf{1})}$$

第６講　場合の数・確率(4)

数直線上の点Ｐは，原点Ｏを出発して，次のルールに従って移動するとする．
「1つのさいころを振り，3以下の目が出たときには正の方向に1，5以上の目が出たときには負の方向に1，それぞれ動く．また，4の目が出たときは動かない．点Ｐの座標が -1 になったら，さいころを振るのをやめ，点Ｐはそこにとどまる．それ以外のときは，さいころをまた振る．」
さいころを多くとも3回まで振り，移動を終えた後の点Ｐの座標を X とする．$X=-1$ となる移動の方法は［ア］通りあり，確率は $\dfrac{\text{イウ}}{\text{エオカ}}$ である．$X=1$ となる移動の方法は［キ］通りあり，確率は $\dfrac{\text{ク}}{\text{ケコ}}$ である．よって，X の期待値 $E(X)$ は $\dfrac{\text{サシ}}{\text{スセソ}}$ である．

正の方向（右）に動くことをR$\left(確率\ \dfrac{1}{2}\right)$，負の方向（左）に動くことをL$\left(確率\ \dfrac{1}{3}\right)$，動かないことを×$\left(確率\ \dfrac{1}{6}\right)$で表す．

$X=-1$ となるのは，順にL，×L，××L，RLLのときの**4**通りである．

その確率は　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{49}{108}}$

$X=1$ のときは，順にRRL，RLR，R××，×R×，××Rの**5**通りである．

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$

$X=2$ となるのは，順にRR×，R×R，×RRである．

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}\times3=\dfrac{1}{8}$　である．

$X=3$ となるのは，RRRのときのみで

その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$　である．

よって　$E(X)=-1\cdot\dfrac{49}{108}+1\cdot\dfrac{5}{24}+2\cdot\dfrac{1}{8}+3\cdot\dfrac{1}{8}=\boldsymbol{\dfrac{41}{108}}$

第７講　三角比・平面図形

点 O を中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる 3 点 A，B，P がある．弦 AB の長さを $\sqrt{3}a$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

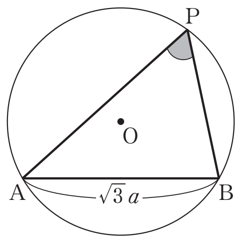
(1)　点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるとき，∠APB＝［アイ］°である．

(2)　点 P が円 C の周上を動くとき，△PAB の面積は PA＝$\sqrt{［ウ］}a$ のとき最大値 $\dfrac{［エ］\sqrt{［オ］}}{［カ］}a^{［キ］}$ をとる．

(1)　円の半径を R とすると，$R=a$

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=2R \qquad \text{よって}\quad \sin\angle\mathrm{APB}=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるので

$0°<\angle\mathrm{APB}<90°$

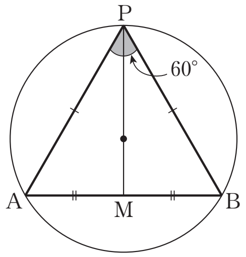
したがって　∠APB＝**60°**

(2)　線分 AB の中点を M とすると，△PAB の面積が最大となるのは，AB の垂直二等分線 OM 上の AB に関して O と同じ側に P があるときであり，このとき △PAB は PA＝PB の二等辺三角形となる．

∠APB＝60° より △PAB は正三角形．

よって　PA＝PB＝AB＝$\boldsymbol{\sqrt{3}}a$

このとき　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\sin 60°=\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}{\boldsymbol{4}}a^2$



（※　$\mathrm{PM}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{3a^2-\dfrac{3}{4}a^2}=\dfrac{3}{2}a$　より

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PM}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ でも可．）

第８講　三角関数(1)

(1)　θ の関数 $\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ を，定数 a，b を用いて $a\sin^3\theta+b\sin\theta$ と表したとき，$(a,\ b)=\left(\boxed{\text{ア}},\ -\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$ である．

(2)　$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ とするとき，方程式 $1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$ の解は $\theta=\pm\dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}$，$\pm\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ である．（ただし，$\boxed{\text{エ}}<\boxed{\text{オ}}$ とする．）

(1)　$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\theta\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)$

$=\frac{1}{4}\sin\theta(\sin^2\theta-3\cos^2\theta)=\frac{1}{4}\sin\theta(4\sin^2\theta-3)=\sin^3\theta-\frac{3}{4}\sin\theta$

よって　$(a,\ b)=\left(\mathbf{1},\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$

【別解】　$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$　より

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}(\cos2\theta-\cos\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2}\left(-2\sin^2\theta+\frac{3}{2}\right)$

したがって　(与式)$=\sin^3\theta-\frac{3}{4}\sin\theta$　より　$(a,\ b)=\left(\mathbf{1},\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$

(2)　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$

$\cos4\theta=2\cos^22\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

$1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$　より　$1+2\cos^2\theta-1+8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=0$

$8\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1=0$　　$(4\cos^2\theta-1)(2\cos^2\theta-1)=0$

$\cos\theta=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$　より　$\theta=\pm\frac{\pi}{\mathbf{3}},\ \pm\frac{\pi}{\mathbf{4}}$

【別解】　$\cos4\theta=2\cos^22\theta-1$

$1+\cos2\theta+\cos4\theta=0$　より　$1+\cos2\theta+2\cos^22\theta-1=0$

$\cos2\theta(2\cos2\theta+1)=0$

$\cos2\theta=0,\ -\frac{1}{2}$　　$-\pi\leqq2\theta<\pi$ より　$2\theta=\pm\frac{2}{3}\pi,\ \pm\frac{\pi}{2}$　　$\theta=\pm\frac{\pi}{\mathbf{3}},\ \pm\frac{\pi}{\mathbf{4}}$

第９講　三角関数(2)

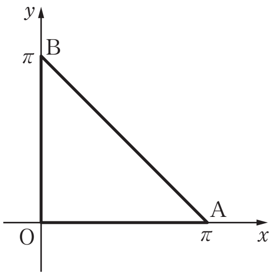
座標平面上で3点 $(0,\ 0)$，$(\pi,\ 0)$，$(0,\ \pi)$ を頂点とする三角形を考える．点 $(x,\ y)$ がこの三角形の辺上を動くとき，$\sin x\cos y+\cos(x+y)$ は

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi,\ \boxed{ウ}\right)\text{ のとき最大値 }\sqrt{\boxed{エ}}\text{ をとり}$$

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi,\ \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi\right)\text{ のとき最小値 }-\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\text{ をとる．}$$

右図のように $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\pi,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \pi)$ とし，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が△OAB の周上を動くときを考える．

$\sin x\cos y+\cos(x+y)=z$ とおく．



(i)　P が線分 OA 上のとき

$0\leqq x\leqq\pi,\ y=0$

$z=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より

$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$ のとき　最大値 $\sqrt{2}$

$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$　つまり　$(x,\ y)=(\pi,\ 0)$ のとき　最小値 -1

(ii)　P が線分 AB 上のとき

$0\leqq x\leqq\pi,\ y=\pi-x$

$z=\sin x\cos(\pi-x)+\cos\pi=\sin x(-\cos x)-1=-\dfrac{1}{2}\sin 2x-1$，$0\leqq 2x\leqq 2\pi$ より

$2x=\dfrac{3}{2}\pi$　つまり　$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき　最大値 $-\dfrac{1}{2}$

$2x=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$ のとき　最小値 $-\dfrac{3}{2}$

(iii)　P が線分 OB 上のとき

$x=0,\ 0\leqq y\leqq\pi,\ z=\cos y$ より

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき　最大値 1　　$(x,\ y)=(0,\ \pi)$ のとき　最小値 -1

(i)〜(iii)より

$(x,\ y)=\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}\pi,\ \boldsymbol{0}\right)$ のとき　最大値 $\sqrt{\boldsymbol{2}}$　　$(x,\ y)=\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}\pi,\ \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}\pi\right)$ のとき　最小値 $-\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

第10講　指数関数・対数関数

正の数 x が，$2\cdot9^x+3^x-3^{-x}+2\cdot9^{-x}=10$ を満たすとする．$t=3^x-3^{-x}$ とおくと，t は2次方程式 [ア] t^2+t- [イ] $=0$ の解である．したがって，$t=\dfrac{[ウ]}{[エ]}$ である．また，$9^x-9^{-x}=\dfrac{[オカ]}{[キ]}$ である．

$t=3^x-3^{-x}$ より　$t^2=(3^x-3^{-x})^2=9^x-2+\dfrac{1}{9^x}$

このとき　$2\cdot9^x+3^x-3^{-x}+2\cdot9^{-x}=10$　より

$$2(t^2+2)+t=10$$

よって t は2次方程式　$\mathbf{2}t^2+t-\mathbf{6}=0$　の解である．

$$(t+2)(2t-3)=0 \quad より \quad t=\frac{3}{2},\ -2$$

ここで，$t=3^x-\dfrac{1}{3^x}$ より

$$(3^x)^2-t\cdot3^x-1=0$$

$3^x=X$ とおくと，この方程式が $x>0$ に解をもつのは $X>1$ のときである．

$$X^2-tX-1=0$$

この左辺を $f(X)$ とおけば，$f(0)=-1<0$ より

$f(1)=-t<0$　すなわち　$t>0$ のときである．

よって　$t=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

（※　$x>0$ のとき　$3^x>3^{-x}$ より　$3^x-3^{-x}>0$　　つまり　$t>0$ である．

よって　$t=\dfrac{3}{2}$　のみとなる．）

また，$9^x-9^{-x}=(3^x+3^{-x})(3^x-3^{-x})$

$(3^x+3^{-x})^2=(3^x-3^{-x})^2+4=t^2+4=\dfrac{25}{4}$　　よって　$3^x+3^{-x}=\dfrac{5}{2}$

$3^x-3^{-x}=t=\dfrac{3}{2}$

したがって　$9^x-9^{-x}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$

第 11 講　図形と方程式(1)

xy 平面上の 2 つの放物線 C_1：$y=-x^2+4x$，C_2：$y=x^2-2x$ を考える．

(1)　C_1，C_2 の原点とは異なる交点を A，C_2 の頂点を B とし，点 P$(x_1,\ y_1)$ から 2 点 A，B を通る直線 l に下ろした垂線の足を H とする．点 P が直線 l 上にないとき，H の座標を x_1，y_1 を用いて表すと

$$\left(\frac{x_1+\boxed{ア}y_1+\boxed{イ}}{\boxed{ウ}},\ \frac{\boxed{エ}x_1+\boxed{オ}y_1-\boxed{カ}}{\boxed{ウ}}\right)$$ である．

(2)　点 P$(x_1,\ y_1)$ が C_1 上にあるとき，三角形 ABP の面積 S を x_1 を用いて表すと，$S=\left|x_1{}^2-\boxed{キ}x_1-\boxed{ク}\right|$ である．また点 P が C_1 上を原点から A まで動くとき，S の最大値は $\boxed{ケ}$ である．

(1)　C_1：$y=-x^2+4x$ と C_2：$y=x^2-2x$ より y を消去して整理すると

$x^2-3x=0$　　$x=0,\ 3$　　よって　A$(3,\ 3)$

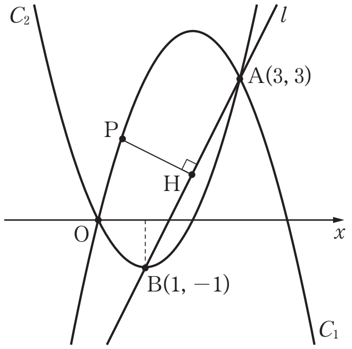
また　C_2：$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$　より　B$(1,\ -1)$

よって直線 l：$y=2(x-1)-1$　つまり　$y=2x-3$　……①

さらに，点 P$(x_1,\ y_1)$ を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}(x-x_1)+y_1 \quad より$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{x_1}{2}+y_1 \quad ……②$$



①，②より

$$x=\frac{x_1+2y_1+6}{5},\ y=\frac{2x_1+4y_1-3}{5} \qquad よって\quad \mathrm{H}\left(\boldsymbol{\frac{x_1+2y_1+6}{5}},\ \boldsymbol{\frac{2x_1+4y_1-3}{5}}\right)$$

(2)　点 P$(x_1,\ y_1)$ が C_1 上にあるとき　$y_1=-x_1{}^2+4x_1$

よって　$\mathrm{HP}=\dfrac{|2x_1-y_1-3|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{|2x_1-(-x_1{}^2+4x_1)-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x_1{}^2-2x_1-3|}{\sqrt{5}}$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$　　したがって　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{HP}=|x_1{}^2-\boldsymbol{2}x_1-\boldsymbol{3}|$

さらに，点 P が C_1 上を原点から A まで動くとき，$x_1{}^2-2x_1-3<0$　より

$S=-x_1{}^2+2x_1+3=-(x_1-1)^2+4$　$(0\leqq x_1\leqq 3)$

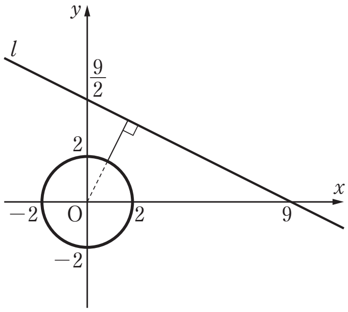
よって　S の最大値は　**4**

第 12 講　図形と方程式(2)

直線 $x+2y=9$ との距離が最小となる円 $x^2+y^2=4$ 上の点の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}},\ \dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}\right)$ であり，そのときの距離は

$\dfrac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}-\boxed{コ}$ である.



直線 l：$x+2y=9$ との距離が最小となる円上の点は，直線 l と垂直で円の中心を通る直線と，円との交点のうち第１象限にある点である.

円の中心 (0, 0) を通り，直線 l に垂直な直線の方程式は $y=2x$ である．これと円：$x^2+y^2=4$ の交点は

$$x^2+4x^2=4 \qquad x^2=\frac{4}{5} \text{ より } \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x>0 \text{ より } \quad x=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，求める点の座標は $\left(\mathbf{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}},\ \mathbf{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}\right)$

　また，このときの距離は，円の中心と直線 l の距離から円の半径を除いたものである.

よって，求める距離は $\dfrac{|-9|}{\sqrt{1+4}}-2=\mathbf{\dfrac{9\sqrt{5}}{5}-2}$

第13講　図形と方程式(3)

座標平面上の点 A$(-3,\ 1)$ を通る直線 l_1 と点 B$(0,\ 3)$ を通る直線 l_2 が常に直交しながら変化するとき，l_1 と l_2 の交点が描く軌跡は，

円 $\left(x+\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\right)^2+(y-\boxed{ウ})^2=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ である．また，この円上の点と原点 O との

距離の最大値は $\dfrac{\boxed{キ}+\sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コ}}$ である．

l_1 と l_2 の交点を P$(X,\ Y)$ とする．

直線 l_1 の傾きは　$X\neq-3$ のとき　$\dfrac{Y-1}{X+3}$　　直線 l_2 の傾きは　$X\neq0$ のとき　$\dfrac{Y-3}{X}$

直交条件より　$\dfrac{Y-1}{X+3}\cdot\dfrac{Y-3}{X}=-1$

つまり　$(X+3)X+(Y-1)(Y-3)=0$　($X=-3,\ 0$ のときもこれでよい)

$X^2+3X+Y^2-4Y+3=0$　　$\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2+(Y-2)^2=\dfrac{13}{4}$

したがって，交点 P の描く軌跡は，円 $\left(x+\mathbf{\dfrac{3}{2}}\right)^2+(y-\mathbf{2})^2=\mathbf{\dfrac{13}{4}}$　である．

【別解】 l_1 と l_2 の交点を P とすると，A，B は定点であり，P が A，B と異なるときは常に $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ より P は AB を直径とする円周上にある．

P が A と一致するときは，l_2 は2点 A，B を通る直線であり，l_1 は A において l_2 と直交する．同様に円周上の点 B も l_1 と l_2 が直交するときの交点である．

また，その円の中心は AB の中点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$，半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+4}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

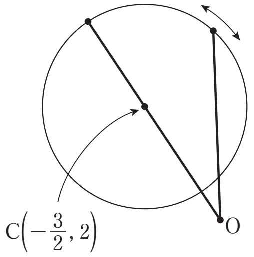
よって，交点 P の描く軌跡は　円 $\left(x+\mathbf{\dfrac{3}{2}}\right)^2+(y-\mathbf{2})^2=\mathbf{\dfrac{13}{4}}$　である．

原点 O と円の中心 C$\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ の距離は $\mathrm{OC}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}=\dfrac{5}{2}$ であり，円の半径は $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

より　OC＞(円の半径)　つまり　点 O は円の外部にある．

したがって，点 O と円周上の点の距離の最大値は

$\mathrm{OC}+(\text{円の半径})=\mathbf{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}}$



第14講　図形と方程式(4)

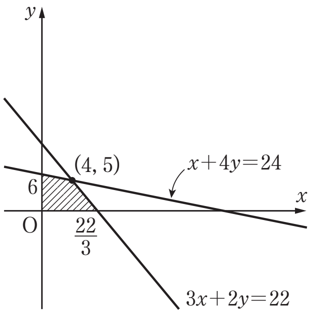
連立不等式 $3x+2y\leqq 22$, $x+4y\leqq 24$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ の表す座標平面上の領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ $(a>0)$ の最大値は

$0<a\leqq\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき $\boxed{ウ}$　　$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}<a\leqq\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき $\boxed{カ}a+\boxed{キ}$

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}<a$ のとき $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}a$　である．

直線 $3x+2y=22$ と $x+4y=24$ の交点は　$(4,\ 5)$

よって領域 D は右図斜線部分（境界含む）．



$ax+y=k$ とおき，直線 $y=-ax+k$（傾き $-a$）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k の最大値を考える．

(i)　$-\dfrac{1}{4}\leqq -a$　つまり　$0<a\leqq\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ のとき

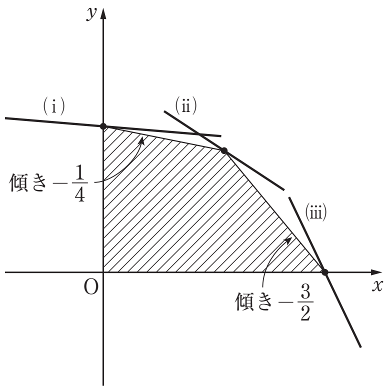
$(x,\ y)=(0,\ 6)$ で最大値　$k=\mathbf{6}$ をとる．

(ii)　$-\dfrac{3}{2}\leqq -a<-\dfrac{1}{4}$　つまり　$\mathbf{\dfrac{1}{4}}<a\leqq\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ のとき

$(x,\ y)=(4,\ 5)$ で最大値　$k=\mathbf{4}a+\mathbf{5}$ をとる．

(iii)　$-a<-\dfrac{3}{2}$　つまり　$\mathbf{\dfrac{3}{2}}<a$ のとき

$(x,\ y)=\left(\dfrac{22}{3},\ 0\right)$ で最大値　$k=\mathbf{\dfrac{22}{3}}a$ をとる．



第15講　微分法・積分法(1)

関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$（a, b は実数の定数）について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲は $a<$ **ア** である．

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるときの a の値を求めたい．2 つの極値をとる x の値を α, β（$\alpha<\beta$）とすると，極大値と極小値の差は $f(\alpha)-f(\beta)=$ **イ** $(\beta-\alpha)(1-a)$ である．また，$\alpha+\beta=$ **ウ** ，$\alpha\beta=$ **エ** であり，$\beta-\alpha=2\sqrt{\boxed{オ}-a}$ である．以上より $a=-$ **カ** である．これは $a<$ **ア** を満たす．

(1)　$f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$　より　$f'(x)=3x^2-6x+3a$

$f(x)$ が極値をもつのは　$f'(x)=0$　すなわち　$x^2-2x+a=0$　について判別式より

$\dfrac{D}{4}=1-a>0$ のとき．

よって　$a<\mathbf{1}$

(2)　2 つの極値をとる x の値が α, β（$\alpha<\beta$）のとき，
$\alpha<\beta$ より　$f(x)$ の増減は右のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで，$f'(x)=0$ の 2 解が α, β であることより，
解と係数の関係から

$\alpha+\beta=\mathbf{2}$，$\alpha\beta=\boldsymbol{a}$　である．

よって，極大値と極小値の差は

$$\begin{aligned}
&f(\alpha)-f(\beta)\\
&=\alpha^3-\beta^3-3(\alpha^2-\beta^2)+3a(\alpha-\beta)\\
&=(\alpha-\beta)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3(\alpha+\beta)+3a\}\\
&=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+3a\}\\
&=(\alpha-\beta)(4-a-6+3a)\\
&=2(\alpha-\beta)(a-1)\\
&=\mathbf{2}(\beta-\alpha)(1-a)
\end{aligned}$$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4-4a$　より　$\beta-\alpha=\sqrt{4-4a}=2\sqrt{\mathbf{1}-a}$

よって　$f(\alpha)-f(\beta)=4\sqrt{1-a}\,(1-a)$

これが 32 となるとき　$\sqrt{1-a}\,(1-a)=8$

両辺を 2 乗して　$(1-a)^3=64$　　$1-a=4$

よって　$a=-\mathbf{3}$　　これは $a<1$ を満たす．

第16講　微分法・積分法(2)

[1]　放物線 $y=-x^2$ に点 A$(0,\ a)$ から引いた2本の接線のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ となるとき，

a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

$f(x)=-x^2$　とおくと　$f'(x)=-2x$

$x=t$ におけるこの放物線の接線の方程式は　$y=-2t(x-t)-t^2$　つまり　$y=-2tx+t^2$

これが A$(0,\ a)$ を通るとき　$a=t^2$　……①

点Aを通る接線が2本存在するのは，①が異なる2つの実数解をもつときである．

よって　$a>0$　であればよい．このとき①の解は　$t=\pm\sqrt{a}$

このとき2本の接線のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ であることから，直線の直交条件より

$$f'(\sqrt{a})\times f'(-\sqrt{a})=-1 \qquad (-2\sqrt{a})\cdot(2\sqrt{a})=-1 \qquad 4a=1 \qquad \text{よって}\quad a=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

[2]　$a>0$ とする．3次方程式 $x^3-ax+a=0$ がただ1つの実数解をもつとき，a の値の範囲は $0<a<\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

$f(x)=x^3-ax+a$　とおくと，$a>0$ より

$f'(x)=3x^2-a=3\left(x+\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=0$　は異なる2実数解　$x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$　をもつ．

よって　$x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$　において $f(x)$ は2極値をとる．

したがって，$f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつのは，$f(x)$ の2極値が同符号のときである．

ゆえに　$f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\cdot f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)>0$　　$\left(a-\dfrac{2}{3}a\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)\left(a+\dfrac{2}{3}a\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)>0$

$$a^2-\frac{4}{27}a^3>0 \qquad a>0\ \text{より}\quad 1-\frac{4}{27}a>0$$

よって　求める a の範囲は　　$0<a<\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

第 17 講　微分法・積分法(3)

放物線 $y=x^2-4x+6$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　点 $(3,\ -1)$ からこの放物線に引いた 2 本の接線の方程式は

$y=$ ア $x-$ イウ ，$y=-$ エ $x+$ オ である．

(2)　(1)で求めた接線と放物線で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$ である．

(1)　$y=x^2-4x+6$　より　$y'=2x-4$

$x=t$ におけるこの放物線の接線は　$y=(2t-4)(x-t)+t^2-4t+6$

つまり　$y=(2t-4)x-t^2+6$　……①

これが点 $(3,\ -1)$ を通るとき

$-1=(2t-4)\cdot 3-t^2+6$　　$t^2-6t+5=0$　よって　$t=5,\ 1$

これらを①に代入して，求める 2 本の接線の方程式は

$y=\mathbf{6}x-\mathbf{19}$，$y=-\mathbf{2}x+\mathbf{5}$

(2)　2 接線の交点の x 座標は　$x=3$　　よって求める図形の面積を S とすると

$$S=\int_1^3\{(x^2-4x+6)-(-2x+5)\}dx+\int_3^5\{(x^2-4x+6)-(6x-19)\}dx$$

$$=\int_1^3(x^2-2x+1)dx+\int_3^5(x^2-10x+25)dx$$

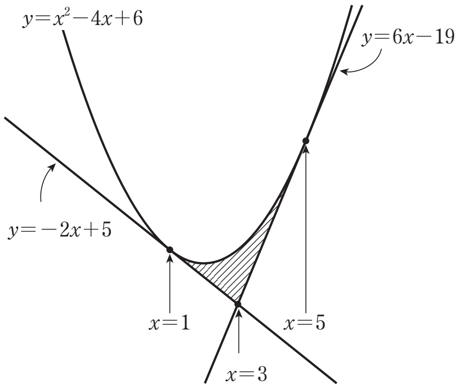
$$=\int_1^3(x-1)^2dx+\int_3^5(x-5)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3+\left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_3^5$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$$

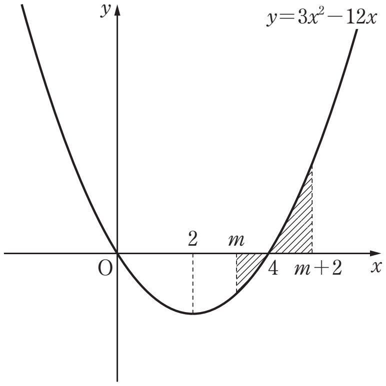


第18講　微分法・積分法(4)

放物線 $y=3x^2-12x$ $(m \leqq x \leqq m+2)$ と3直線 $y=0$, $x=m$, $x=m+2$ で囲まれた2つの部分の面積の和を S とする．ただし，m は定数で $2<m<4$ とする．このとき，S は $m=$ ア $+\sqrt{\text{イ}}$ で最小値 ウエ $-$ オカ $\sqrt{\text{キ}}$ をとる．

$y=3x^2-12x=3x(x-4)$

$2<m<4$ より，S は右図斜線部分の面積である．



$$S=-\int_m^4 (3x^2-12x)dx+\int_4^{m+2}(3x^2-12x)dx$$
$$=-\Big[x^3-6x^2\Big]_m^4+\Big[x^3-6x^2\Big]_4^{m+2}$$
$$=-\{64-96-(m^3-6m^2)\}$$
$$+\{(m+2)^3-6(m+2)^2-(64-96)\}$$
$$=2m^3-6m^2-12m+48$$

$f(m)=2m^3-6m^2-12m+48$　とおくと

$f'(m)=6m^2-12m-12$　　$m=1\pm\sqrt{3}$ のとき　$f'(m)=0$

よって　$f(m)$ の増減は右表のようになり，

S は $m=\mathbf{1+\sqrt{3}}$ で最小となる．

m	2	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$	4
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		↘		↗	

↑
極小かつ最小

ここで　$f(m)\div f'(m)$ を計算することにより

$$f(m)=(6m^2-12m-12)\left(\frac{1}{3}m-\frac{1}{3}\right)-12m+44$$

$m=1+\sqrt{3}$ のとき　$f'(m)=6m^2-12m-12=0$　より

$f(1+\sqrt{3})=-12(1+\sqrt{3})+44=32-12\sqrt{3}$

よって，求める S の最小値は　$\mathbf{32-12\sqrt{3}}$ （$m=1+\sqrt{3}$ のとき）

第19講　ベクトル(1)

三角形 ABC において，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ とおく．$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ を満たしている．$\vec{c}=$ **ア** $\vec{a}-\vec{b}$ より，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$ とあわせて $|\vec{a}|^2=$ **イ** である．同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ より $|\vec{b}|^2=$ **ウ** である．したがって，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$ である．

$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}-\vec{b}$　より

$\vec{c}\cdot\vec{a}=(-\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|^2+5=-3$　　ゆえに　$|\vec{a}|^2=\mathbf{8}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=5-|\vec{b}|^2=-4$　　ゆえに　$|\vec{b}|^2=\mathbf{9}$

したがって，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|-\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\{(-\vec{a})\cdot\vec{b}\}^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{8\times9-25}=\frac{\sqrt{\mathbf{47}}}{\mathbf{2}}$$

第20講　ベクトル(2)

平面上に三角形OABがあり，3辺の長さは AB＝5，OA＝6，OB＝7 であるとする．この三角形OABと正の数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点Pをとる．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ **アイ** である．

(2)　t が正の数全体を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小値をとるような t の値を t_0 とし，$t=t_0$ のときの点Pを $\mathrm{P_0}$ とすれば，$t_0=\dfrac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}|=$ **カキ** である．さらに，点 $\mathrm{P_0}$ から直線OAに下ろした垂線を $\mathrm{P_0H}$ とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2}=\mathbf{30}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{t^2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$$=36t^2+\frac{49}{t^2}+60\geqq 2\sqrt{36t^2\times\frac{49}{t^2}}+60=144$$

等号成立は　$36t^2=\dfrac{49}{t^2}$　　$t>0$ より　$t=\sqrt{\dfrac{7}{6}}=\dfrac{\sqrt{42}}{6}$ のとき．

よって　$t_0=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{42}}{6}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}|=\sqrt{144}=\mathbf{12}$　である．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$k$ は実数）と表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0H}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\left(t_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{t_0}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=(k-t_0)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{t_0}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{P_0H}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{P_0H}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left\{(k-t_0)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{t_0}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=(k-t_0)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{1}{t_0}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$36\left(k-\dfrac{\sqrt{42}}{6}\right)-\dfrac{6}{\sqrt{42}}\times30=0$　　$k=\dfrac{2\sqrt{42}}{7}$　　よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{42}}{7}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

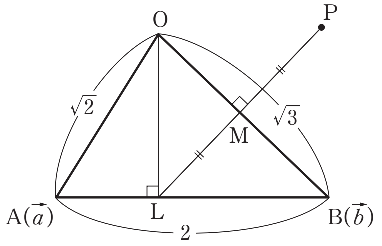
第 21 講　ベクトル(3)

三角形 OAB について，OA$=\sqrt{2}$，OB$=\sqrt{3}$，AB$=2$ とする．点 O から辺 AB に垂線を下ろしたときの交点を L，辺 OB に関して L と対称な点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{エ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{b}\right)$ である．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}\vec{b}$ である．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{2+3-4}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$



L は辺 AB 上の点より　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$$(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-t)|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\frac{1}{2}(1-t)-2(1-t)+3t-\frac{1}{2}t=0\qquad t=\frac{3}{8}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{5}{8}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}=\mathbf{\dfrac{1}{8}(5\vec{a}+3\vec{b})}$

(2)　点 L から OB に垂線を下ろしたときの交点を M とすると，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\vec{b}$ とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(k\vec{b}-\frac{5}{8}\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$$

$$k|\vec{b}|^2-\frac{5}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{3}{8}|\vec{b}|^2=0\qquad 3k-\frac{5}{16}-\frac{9}{8}=0\qquad k=\frac{23}{48}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{23}{48}\vec{b}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}})=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}$

$$=2\cdot\frac{23}{48}\vec{b}-\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)=\mathbf{-\frac{5}{8}}\vec{a}+\mathbf{\frac{7}{12}}\vec{b}$$

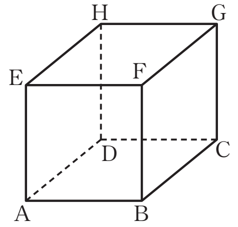
【別解】　$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{8}(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{8}(5\vec{a}\cdot\vec{b}+3|\vec{b}|^2)=\dfrac{1}{8}\left(5\times\dfrac{1}{2}+3\times3\right)=\dfrac{23}{16}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\cdot\vec{b}=|\overrightarrow{\mathrm{OL}}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{BOL}=|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$

よって　$\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{23}{16}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=\dfrac{23}{16\sqrt{3}}=\dfrac{23}{48}\sqrt{3}=\dfrac{23}{48}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{23}{48}\vec{b}$　　(以下略)

第22講　ベクトル(4)

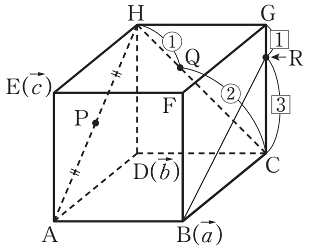


右の立方体 ABCD-EFGH の1辺の長さは1である．線分 AH の中点を P，線分 HC を $1:2$ に内分する点を Q とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}\vec{a}+\dfrac{1}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{c}$ である．

(2)　線分 CG を $3:1$ に内分する点を R とする．線分 BR 上に点 S を，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DS}}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{\mathrm{DS}}=\vec{a}-\dfrac{11}{\boxed{\text{エオ}}}\vec{b}+\dfrac{1}{\boxed{\text{カ}}}\vec{c}$ である．

(3)　次に，点 B，C，G，F を含む平面上に点 T を，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DT}}$ が垂直になるようにとる．線分 DT の長さは $\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{5}\vec{b}-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{5}\vec{c}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる．



$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

$$=\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{\mathbf{3}}\vec{a}+\frac{1}{\mathbf{2}}\vec{b}+\frac{1}{\mathbf{6}}\vec{c}$$

(2)　S は線分 BR 上の点より　$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=t\overrightarrow{\mathrm{BR}}$（$0<t<1$）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{DS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BR}})-\vec{b}=\vec{a}+t\left(\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)-\vec{b}=\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b}+\frac{3}{4}t\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DS}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DS}}=\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{2}t|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{4}t|\vec{c}|^2=0$

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}t=0$　　$\dfrac{5}{8}t=\dfrac{1}{6}$　　$t=\dfrac{4}{15}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{DS}}=\vec{a}-\dfrac{11}{\mathbf{15}}\vec{b}+\dfrac{1}{\mathbf{5}}\vec{c}$

(3)　T は平面 BCGF 上の点より　$\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\vec{a}+(\alpha\vec{b}+\beta\vec{c})$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DT}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{6}\beta=0$　　$\beta=-3\alpha-2$

このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{DT}}|^2=1+\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+(-3\alpha-2)^2+1=10\left(\alpha+\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{7}{5}$　より

$\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\beta=-\dfrac{1}{5}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\vec{a}-\dfrac{\mathbf{3}}{5}\vec{b}-\dfrac{\mathbf{1}}{5}\vec{c}$　のとき　$|\overrightarrow{\mathrm{DT}}|$ は最小値　$\sqrt{\dfrac{7}{5}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{35}}}{\mathbf{5}}$　をとる．

第23講　数列(1)

等差数列 2, 5, 8, …… を $\{a_n\}$, 等比数列 2, 4, 8, …… を $\{b_n\}$ とし, $\{b_n\}$ の項のうち $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ をつくるとき, 次の問いに答えよ.

(1) $a_n=$ ア $n-$ イ , $b_n=$ ウ ^{n} である.

(2) $a_l=b_m$ が成り立つとすると, ア $l-$ イ $=$ ウ ^{m} である.

ここで ウ $^{m+1}$, ウ $^{m+2}$ を考えることにより, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通項は公比 エ の等比数列であることがわかり, その初項は オ である. したがって, 数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=$ カ $^{2n-\text{キ}}$ である.

(1) $a_n=2+(n-1)\cdot3=\mathbf{3n-1}$　　$b_n=2\cdot2^{n-1}=\mathbf{2^n}$

(2) $a_l=b_m$ とすると　$\mathbf{3l-1=2^m}$　……①　このとき

$\mathbf{2^{m+1}}=2\cdot2^m=2(3l-1)=3(2l-1)+1$

よって　(3 の倍数)-1　の形とならず, 数列 $\{a_n\}$ の項にはなり得ない.

$\mathbf{2^{m+2}}=4\cdot2^m=4(3l-1)=3(4l-1)-1$

よって　(3 の倍数)-1　の形となり, 数列 $\{a_n\}$ の項になり得る.

したがって　$b_{m+2}=4\cdot b_m$　より　共通項は公比 **4** の等比数列である.

また, $l=1$, $m=1$ は①を満たし, 両辺は 2　　よって　共通項の初項は **2** である.

ゆえに　$c_n=2\cdot4^{n-1}=\mathbf{2^{2n-1}}$

第 24 講　数列(2)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3n^3+6n^2+n$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）であるとき，一般項は $a_n=$ **ア** n^2+ **イ** $n-$ **ウ** である．さらに，

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\boxed{エ}}\left(\dfrac{1}{3n-\boxed{オ}}-\dfrac{1}{3n+\boxed{カ}}\right)$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$

である．

$a_1=S_1=3\cdot1^3+6\cdot1^2+1=10$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3n^3+6n^2+n)-\{3(n-1)^3+6(n-1)^2+(n-1)\}\\&=3n^3+6n^2+n-(3n^3-9n^2+9n-3+6n^2-12n+6+n-1)\\&=9n^2+3n-2\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ．

よって　$a_n=\mathbf{9}n^2+\mathbf{3}n-\mathbf{2}$

このとき

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{\mathbf{3}}\left(\frac{1}{3n-\mathbf{1}}-\frac{1}{3n+\mathbf{2}}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)\\&=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{32}}\end{aligned}$$

高３　ハイレベル数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

ようこそ，後期講座へ.

前期講座で収録できなかった単元別の問題のうち，「数列」「高次方程式」「証明」「整数問題」がこの後期講座に収録されています．じっくり取り組んでください.

そしてテキストの後半部分では，「総合問題」と題してみなさんに実践（実戦）練習を積んでいただきます．単元別学習と各自の練習で身につけた知識を確かなものにし，さらに応用力を高めるための問題が掲載されています．様々な局面が絡み合います．またどんな展開になるか事前に予告はしません．それが入試問題の醍醐味です．どこかで見たことのあるものについては，その攻略法を確かめながら進み，そして初めて出会う局面に関しては，それをどう切り拓くかをじっくり考え，そして実行する．入試本番でみなさんが問題を目の前にして行うべきこと，それを「総合問題」を通じて養ってください.

この後期講座を一通りやれば，「問題を通じて学ぶ力」があなたのものになるでしょう．さらなる力をつけるために，より上のレベルの講座に進むのもよいでしょう．また，入試問題集や大学の過去問を解き，解説と照らし合わせ，数学力の幅をさらに広げていきましょう.

前期講座でも触れましたが，「人から人へ」．それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません．真剣に動画を視聴してください．一緒に数学の世界を紐解いていきましょう.

さぁ，そろそろ時間です．まずはしっかりと「予習」し，自分の力の到達具合を確認しておいてください．いつでも，どこでも，何度でも．『スタディサプリ』は君たちと共にあります.

山内　恵介

＜後期　目次＞

第 25 講　数列(3)

第 26 講　数列(4)

第 27 講　高次方程式

第 28 講　証明(1)

第 29 講　証明(2)

第 30 講　整数問題(1)

第 31 講　整数問題(2)

第 32 講　整数問題(3)

第 33 講　総合問題(1)

第 34 講　総合問題(2)

第 35 講　総合問題(3)

第 36 講　総合問題(4)

第 37 講　総合問題(5)

第 38 講　総合問題(6)

第 39 講　総合問題(7)

第 40 講　総合問題(8)

第 41 講　総合問題(9)

第 42 講　総合問題(10)

第 43 講　総合問題(11)

第 44 講　総合問題(12)

第 45 講　総合問題(13)

第 46 講　総合問題(14)

第 47 講　総合問題(15)

第 48 講　総合問題(16)

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で構成されています．まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう．問題をとらえる自分の力がどこまで養われているかがわかります．

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません．最後まで解けないことも多いかもしれません．それでも，いろんな可能性を追ってみましょう．

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 15 分～20 分（[1][2]に分かれている場合はそれぞれおよそ 10 分）です．３問でおよそ１時間．数学に本気で向き合う時間です．

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です．それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください．問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています．ここには何でも「自由」に書いて残すことができます．「自由」とはどういうことか．それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです．授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません．よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです．きれいにまとめても誰も見てくれませんよ．あくまで「Note」＝「記録」です．後から見て自分だけがわかる程度でいいのです．

これまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ．この講座はいつでも止めたり戻ったりできます．もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありませんよ．また，止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です．あなた方に残された時間は限られています．勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事ですよ．

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題を見ながらもう一度頭に描いてみましょう．もし思い出せない場面があったら「Note 欄」を見てみましょう．そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を別の紙や復習用ノートに解いてみましょう．予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述してみてください．もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします．

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません．また，あなたの想いをどういう記述で表現してよいかわからない場合もあるかもしれません．安心してください．すべての問題に「解答例」がついています．必要に応じ

て参考にしてください.

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です．こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう.

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います．そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします．チャンスは「空き時間」「隙間時間」です．一度自分で取り組んだことは，次に解くときは確実に速度と正確性が上がります．それを実感することも成長の糧となりましょう.

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう．「練習問題」が各講１題ずつ用意してあります．講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります．また問題によって難易度も様々です.

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう．この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です．より理解を深めていただきたく思います.

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に近づくことができます．入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります．授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう．また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも．それを防ぐためのこのサイクルが大切です．もちろん，授業は何度でも再生可能です．後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします．決して短くはないこの道のり．１日１日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう.

最後に．この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です．例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります．とくに「詳細な解答」，つまり答えに行き着く「プロセス」を自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません．ですから「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません．自分で考えれば必ず答えにたどり着く！とおっしゃる先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう．受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です.

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう.

第 25 講　数列(3)

1 数列 $\{a_n\}$: $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{1},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{3}{1},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{1},\ \cdots\cdots$ を次のような群に分け，第 m 群には m 個の数が入るようにする．

$$\frac{1}{1}\left|\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\right|\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\left|\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\right|,\ \cdots\cdots,\ \left|\frac{1}{m},\ \frac{2}{m-1},\ \cdots\cdots,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m}{1}\right|,\ \cdots\cdots$$

(1)　数列 $\{a_n\}$ において $\dfrac{q}{p}$ は第何項か．ただし，$\dfrac{q}{p}$ は，例えば $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ のように約分しないものとする．

(2)　a_{100} を求めよ．

< Note >

2　k を0以上の整数とし，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq k$ を満たす0以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする．a_k を k の式で表せ.

< Note >

3　自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2)　自然数 m について，$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{m^2}$ を，m を用いて表せ．

＜ Note ＞

第 25 講　数列(3)

数列 $\{a_n\}$：$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, …… について次の問いに答えよ.

(1) $\frac{35}{49}$ は数列 $\{a_n\}$ の第 **アイウエ** 項である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 1005 項までの和は **オカキ** である.

< Note >

第 26 講　数列(4)

1　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項，および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n と表すとき，すべての自然数 n について

$$3S_n = a_n + 7\cdot 3^n - 6$$

が成立するとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n および n の式で表せ．

(2) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_n の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

3　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$　…①　($n=1$，2，3，$\cdots$)　によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

第 26 講　数列(4)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，a_n と S_n の間には関係式

$$S_n=\frac{1}{3}(2^n-a_n-6)$$ が成り立つ．

(1)　初項を a_1 とすると，$a_1=$ [アイ] である．

(2)　S_{n+1} と S_n の差は　$S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{[ウ]}(2^{n+1}-a_{n+1}+a_n-[エ]^n)$ となる．

よって　a_n と a_{n+1} との関係式　$a_{n+1}=\dfrac{1}{[オ]}a_n+[カ]^{n-2}$　が成り立つ．

(3)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{[キ]}b_n+\dfrac{1}{[ク]}$　となる．

したがって　$a_n=\dfrac{1}{[ケ]}\left\{2^n-[コ]\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$　となる．

< Note >

第27講　高次方程式

1　整式 $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$，$x-2$ で割ると余りが 3 となる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを求めよ．

(2)　$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りを求めよ．

< Note >

2　$a+b+c=2$　……①，$ab+bc+ca=3$　……②，$abc=2$　……③　のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a^2+b^2+c^2$　および　$a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ．

(2)　3次方程式　$x^3+Ax^2+Bx+C=0$ が $x=a$，b，c を解にもつとき，A，B，C の値を求めよ．

(3)　$a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

3　a，b を実数とする．方程式 $x^3+(a+1)x^2+(2a+b-1)x+2b+2=0$ ……①　は実数解と虚数解をもつとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①の実数解を求めよ．

(2)　a，b が満たす不等式を求めよ．

(3)　a，b がともに整数で，$b \leqq 1$ であるような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

＜ Note ＞

第27講　高次方程式

3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α，β，γ とする．

$\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$a=-$ **ア** ，$b=-$ **イ** ，

$c=-$ **ウ** である．また，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=$ **エオ** である．

＜ Note ＞

第 28 講　証明(1)

1　n は自然数とする．次の(1)～(4)の不等式をそれぞれ示せ．

(1)　$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} < n+2$

(2)　$n+3 < \sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$

(3)　$n+3 < \sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$

(4)　$n+3 < \sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)} < n+\dfrac{7}{2}$

＜ Note ＞

2 [1]　a, b, c, x, y, z を実数とする.

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ ……①　が成り立つことを示せ.

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$　の最小値を求めよ.

[2]　$x \neq 0$ とするとき，$k=x+\dfrac{1}{x}$ のとり得る値の範囲を求めよ.

< Note >

3 [1]　x，y は実数とする．$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ であることを示せ．

[2]　不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx \geqq 0$ が任意の実数 x，y，z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

< Note >

第 28 講　証明(1)

[1]　t を 0 でない実数とするとき，$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$ は　$t=$ **ア** ，$-$ **イ** のとき最小値 **ウ** をとる．

[2]　a，b，c，x，y，z が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ．これを利用して，a，b，c が $a^2+b^2+c^2=1$ を満たす実数であるとき，$a+b+c$ の最大値を求める．

(**エ** $^2+$ **オ** $^2+$ **カ** ^{2})$(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$ であることより

$(a+b+c)^2\leqq$ **キ** である．

よって，$a=b=c=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，$a+b+c$ は最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる．

＜ Note ＞

第 29 講　証明(2)

1　関数　$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$ を示せ．

(2)　すべての自然数 n に対して　$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数であることを，数学的帰納法で示せ．ただし，有理数 r，s を用いて表される実数 $r+s\sqrt{2}$ は　$s\neq0$　ならば無理数であることを，証明なく用いてもよい．

＜ Note ＞

2　n を自然数とする.

(1)　不等式　$\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n \geqq 3$　が成り立つことを証明せよ.

(2)　不等式　$(n+1)^{n-1}(n+2)^n \geqq 3^n(n!)^2$　が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ.

＜ Note ＞

3　a，b を実数とする．関数　$f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{\sqrt{5}}$ は　$f(1)=1$，$f(2)=1$ を満たすとする．

(1)　a，b の値を求めよ．

(2)　$f(2)+f(3)=f(4)$　が成り立つことを示せ．

(3)　x が自然数のとき，$f(x)$ も自然数となることを示せ．

＜ Note ＞

第29講　証明(2)

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の条件を満たしている．

$$a_1=1,\ b_1=0,\ a_n=\frac{b_n+b_{n+1}}{2}\quad (n\geqq 1),\ b_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+1}}\quad (n\geqq 1)$$

このとき，$b_{n+1}=$ [ア] a_n-b_n，$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}{}^{[イ]}}{a_n}$ より $b_2=$ [ウ]，$a_2=$ [エ]，$b_3=$ [オ]，$a_3=$ [カ] である．これらより，$a_n=n^{[キ]}$，$b_n=n(n-$ [ク] $)$ と推測され，これらが正しいことが数学的帰納法で証明できる．したがって，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{(n-\boxed{ケ})n(n+\boxed{コ})}{3}$$ である．

＜ Note ＞

第 30 講　整数問題(1)

1　[1]　5^n が 30! の約数となるような自然数 n のうち最大のものを求めよ.

[2]　n が 3 以上の奇数のとき，n^3-n は 24 で割り切れることを示せ.

＜ Note ＞

2　33^{20} を 90 で割ったときの余りを求めよ.

＜ Note ＞

3 [1]　n を 2 以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ.

[2]　3 より大きな素数 p について，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを調べたい.

(1)　$p=5,\ 7,\ 11$ に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りを求めよ.

(2)　(1)の結果から，一般に 3 より大きな素数 p に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを予想し，さらにその予想が正しいことを証明せよ.

＜ Note ＞

第 30 講　整数問題(1)

［1］ 30 の階乗の素因数分解を $30!=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots\times23^i\times29^j$ と表したとき，

$a=$ **アイ** ，$b=$ **ウエ** ，$c=$ **オ**

である．また，30! は末尾から続けて **カ** 個の 0 が並ぶ．

［2］ $P(n)=(n-1)n(n+1)$ とする．n が奇数のとき，$P(n)$ が 24 の倍数であることを示したい．n が奇数のとき，整数 m を用いて $n=2m-1$ と表すことができる．このとき，

$P(n)=P(2m-1)=$ **キ** $m(m-1)($ **ク** $m-1)$

$=$ **キ** $\{m(m-1)(m-2)+(m-1)m(m+1)\}$

と変形できる．$m(m-1)(m-2)$，$(m-1)m(m+1)$ は連続 3 整数の積，すなわち 6 の倍数である．

したがって $P(n)$ は (**キ** の倍数) × (6 の倍数) の形で表すことができる．

したがって，n が奇数のとき，$P(n)$ は 24 の倍数である．

＜ Note ＞

第31講　整数問題(2)

1 [1]　n を自然数とするとき，$\dfrac{4n+1}{2n-1}$ は整数値 a をとるものとする．a の最大値を求めよ．

[2]　(1)　$xy=2x+2y+2$ を満たす自然数 x，y の組，および整数 x，y の組はそれぞれ何組あるか．ただし，$x \geqq y$ とする．

(2)　$\sqrt{n^2+27}$ が整数であるような自然数 n をすべて求めよ．

＜ Note ＞

2　3で割ると2余り，5で割ると3余り，11で割ると9余る整数のうちで，1000を越えない最大のものを求めよ．

< Note >

3　方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　……①　を満たす自然数の組　$(x,\ y,\ z)$ について考える.

(1)　$x=1$　のとき，正の整数 $y,\ z$ の組をすべて求めよ.

(2)　x のとり得る値の範囲を求めよ.

(3)　方程式①を解け.

＜ Note ＞

第 31 講　整数問題(2)

[1]　$\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n は **ア** 個ある．

[2]　$l \leqq m \leqq n$ のとき　$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　……①　を満たす自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよう．

$l,\ m$ は自然数で　$l \leqq m$　より　$\dfrac{1}{m} \leqq \dfrac{1}{l}$ である．また $l,\ n$ は自然数で　$l \leqq n$　より　$\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{l}$ である．

よって①から　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{\boxed{イ}}{l}$　つまり　$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{\boxed{イ}}{l}$　であることより，l のとり得る最大値は $l=$ **ウ** であることがわかる．$l=1$ のとき　①は

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$　より　これを満たす $(m,\ n)$ の組は **カ** 組ある．l のとり得る値を順に①に代入することにより，①を満たす自然数 $(l,\ m,\ n)$ の組数は全部で **キ** 組である．

< Note >

第32講　整数問題(3)

1　自然数 n に対し，$a_n=2^{3n+3}-3^{n+1}$ とおく．すべての a_n を割り切る自然数のうち最大のものを求めよ．

< Note >

2　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする．

$$a_1=4,\ b_1=3,\ a_{n+1}=4a_n-3b_n,\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2)　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに５の倍数であることを証明せよ．

(3)　a_n も b_n も５の倍数ではないことを証明せよ．

＜ Note ＞

3 直角三角形 ABC は，$\angle \mathrm{C}$ が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2) $\tan\angle \mathrm{A}$ と $\tan\angle \mathrm{B}$ は，いずれも整数にならないことを示せ．

< Note >

第32講　整数問題(3)

整数　$a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めたい．

$a_1=$ **アイ** ，$a_2=$ **ウエオ** より，すべての a_n を割り切る可能性がある素数は **カ** のみ．よって求める素数は カ であると予想される．a_k が カ で割り切れると仮定すると，

$a_{k+1}=$ **キク** $\times(-1)^k2^{4k-3}+$ **ケコ** a_k　より，a_{k+1} も カ で割り切れる．

したがって，数学的帰納法により，すべての a_n を割り切る素数は カ である．

＜ Note ＞

第33講　総合問題(1)

1　a は $a>-\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とし，$f(x)=x^2-2ax$ とおく．

(1)　2次関数　$y=f(x)$　のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　2次不等式　$f(x)\geqq x$　を解け．

(3)　x が $f(x)\geqq x$　を満たす範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

< Note >

2　座標平面上の 3 点 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(0,\ 6)$ を頂点とする三角形と 4 点 $(0,\ t)$, $(0,\ t-4)$, $(4,\ t-4)$, $(4,\ t)$ を頂点とする正方形の共通部分の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$S(2)$ と $S(6)$ の値を求めよ．

(2)　$S(t)$ を最大にする t の値と，$S(t)$ の最大値 M を求めよ．

(3)　$2 \leqq t \leqq 5$ のとき，$S(t)=S(t+1)$ を満たす t の値を求めよ．

＜ Note ＞

3　実数 x，y について，関係式 $x^2+xy+y^2=3$ が成り立つとする．

(1)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくとき，t を s の式で表せ．

(2)　s のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　$x^2+y^2+x+y=k$ とおくとき，k を s の式で表せ．

(4)　k のとり得る値の最大値 M と最小値 m を求めよ．

< Note >

第33講　総合問題(1)

等式　$x^2-xy+y^2=2$ を満たす実数 x，y について，次の問いに答えよ．

(1)　$p=x+y$，$q=xy$ とおくとき，$q=\dfrac{p^2-\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$　である．

(2)　p のとり得る値の範囲は　$-\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\leqq p\leqq\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$　である．

(3)　$2x+2y+3xy$ は p を用いて　$p^2+\boxed{\text{オ}}p-\boxed{\text{カ}}$ と表せる．よって

$2x+2y+3xy$ の最大値は $\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$，最小値は　$-\boxed{\text{コ}}$ である．

< Note >

第34講　総合問題(2)

1　$x+y+z=n$（n は正の整数）を満たす正の整数の組（x，y，z）について，次の問いに答えよ．

(1)　$n=19$ のとき，（x，y，z）の組は何通りあるか．そのうち，x，y，z のいずれか2つが等しい組，$x \leqq y \leqq z$ を満たす組はそれぞれ何通りあるか．

(2)　n が6の倍数であるとき，$x \leqq y \leqq z$ を満たす（x，y，z）の組は何通りあるか．

＜ Note ＞

2 n を3以上の整数とする．1から $3n$ までの番号が書かれた $3n$ 枚のカードをAさん，Bさん，Cさんの3人に n 枚ずつ配る．

(1) カードの配り方は何通りあるか．

(2) Aさんのカードの番号の最小値が $n+1$ で，Bさんのカードの番号の最小値が $2n-1$ である配り方は何通りあるか．

< Note >

3 区別できない 9 個の球を A，B，C，D の 4 つの箱のいずれかに入れる．A，B，C，D に入れた球の個数をそれぞれ a，b，c，d とし，$X=1000a+100b+10c+d$ とする．X のとり得る値を小さい順に並べたときに 31 番目にくる数を求めよ．また，X が 4 桁の数となる球の入れ方は何通りあるか求めよ．

＜ Note ＞

第 34 講　総合問題(2)

(1)　$a+b+c=6m$，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$c \geqq 0$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の組は
　アイ m^2+ **ウ** $m+1$ 通りある．

(2)　(1)のうち，$a=b$ を満たすものは **エ** $m+1$ 通りあり，a，b，c のどの 2 つも異なるものは **オカ** m^2 通りある．

(3)　$a+b+c=6m$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，$0 \leqq a<b<c$ を満たす組は **キ** m^2 通りであり，$0 \leqq a \leqq b \leqq c$ を満たす組は **ク** m^2+ **ケ** $m+1$ 通りある．

＜ Note ＞

第35講　総合問題(3)

1　1，2，3，4，5の数字が1つずつ書かれた5枚のカードが横一列に並んでいる．このカードの中から隣り合って置かれている2枚のカードを無作為に選んで入れ替える操作を繰り返す．ただし，最初の状態では数字の小さい順に1，2，3，4，5と並んでいるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　2回の操作を終えた後のカードの並び方は，全部で何通りありうるか求めよ．

(2)　4回の操作の過程で，数字3が書かれたカードが1回も動かされることがない確率を求めよ．

(3)　4回の操作を終えた後，数字3が書かれたカードが左から3番目にある確率を求めよ．

< Note >

2　2 個のサイコロを投げて，xy 平面上の点 P を移動させる次の試行を考える．

試行：2 個のサイコロを同時に投げて，大きい目の数を X，小さい目の数を Y とする．ただし，同じ目が出た場合は，X，Y の両者をその目の数とする．このとき

X が 3 以上なら，点 P を x 軸の正の方向に 1 動かし，

Y が 3 以上なら，点 P をさらに y 軸の正の方向に 1 動かす．

この試行を繰り返して点 P を原点 (0, 0) から順に動かしていくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　1 回目の試行終了後に点 P が (1, 0) に移動している確率を求めよ．

(2)　2 回目の試行終了後に点 P が (1, 1) に移動している確率を求めよ．

(3)　n 回目の試行終了後に点 P が $(n,\ n-1)$ に移動している確率を求めよ．ただし，n は自然数である．

＜ Note ＞

3　n を自然数とする．1つの袋に白球が n 個と赤球が2個，合わせて $n+2$ 個の球が入っている．この袋から，$n+1$ 個の球を1個ずつ取り出し，左から1列に順に並べる．

(1)　並べた列に赤球が2個入っている確率を，n を用いて表せ.

(2)　2個の赤球の間にある白球の個数を k とする．ただし，並べた列に赤球が2個入っていない場合は，$k=0$ とする．このとき，k の期待値が1以上となる最小の n の値を求めよ．

< Note >

第35講　総合問題(3)

赤い本が2冊，青い本がn冊ある．この$n+2$冊の本を無作為に1冊ずつ，本棚に左から並べていく．2冊の赤い本の間にある青い本の冊数をXとする．
例えば$n \geqq 3$のとき，$X=3$となる場合について考える。このとき，2冊の赤い本の間に3冊の青い本がある．2冊の赤い本のうち1冊目を置く場所は　$n-$ ア 通りある．

よって，$X=3$となる確率は　$\dfrac{n-\boxed{\text{ア}}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$ である．

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$に対し，$X=k$となる確率を$P(X=k)$とすると，

$P(X=k)=\dfrac{n-k+\boxed{\text{イ}}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．したがって，Xの期待値は　$\dfrac{n}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

第36講　総合問題(4)

1　xy 平面上で不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{2} \leqq \sin(x+y) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を領域 D とする.

(1)　領域 D の面積を求めよ.

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D の中を動くとき,

$3\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+y\right)+\cos^2\left(\dfrac{x}{2}+y\right)+\sqrt{3}\sin(x+2y)+2$ の最大値と最小値を求めよ.

< Note >

2 [1]　$a>1$ のとき，x についての不等式 $2a^{3x+1}-a^{2x+2}-2a^{2x}+a^{x+1}\leqq 0$ を解け.

[2]　$a>0$，$a\neq 1$ のとき　$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq 2x+1$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

＜ Note ＞

3　x の方程式　$|\log_{10}x|=px+q$　……①（p，q は実数）が3つの相異なる正の解をもち，次の2つの条件を満たすとする．

(i)　3つの解の比は $1:2:3$ である．

(ii)　3つの解のうち最小のものは $\frac{1}{2}$ より大きく1より小さい．

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ．

＜ Note ＞

第36講　総合問題(4)

$0<a<1$ のとき　x についての方程式

$$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a \quad \cdots\cdots①$$

の解 x を求める．①の真数条件より $x>\dfrac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　$\cdots\cdots②$　である．

$\dfrac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}=\log_{\boxed{ア}}(x-\boxed{イ})$，　$\log_2 2a=\boxed{ウ}+\log_2\boxed{エ}$　より

①は　$x\{\boxed{オ}ax-(\boxed{カ}a^2+1)\}=0$　と変形できる．

②かつ $0<a<1$ より　$x\neq 0$　であるから　$x=\dfrac{\boxed{カ}a^2+1}{\boxed{オ}a}$　であり，これは②を満たす．

ここで　$x=\boxed{キ}+\dfrac{1}{\boxed{ク}a}$　と変形できることにより，x は $a=\dfrac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ のとき

最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{サ}}}$ をとる．

＜ Note ＞

第37講　総合問題(5)

1　a を正の定数とし，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=1$ で囲まれる領域を D とする．y 軸上の点を中心とし，領域 D に含まれる円の半径の最大値を求めよ．

＜ Note ＞

2　原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする．

(1)　直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C の 2 本の接線を引き，その接点を M, N とする．直線 OP と弦 MN の交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする．

(2)　点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

＜ Note ＞

3 ［1］ k を正の実数とし，点 $(3k,\ 4k)$ を中心とする半径 $5k+1$ の円を C_k とする．k がすべての正の実数値をとって変化するとき，円 C_k の動く範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

［2］ O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする．

⑴ C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

⑵ 点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，図示せよ．

< Note >

第37講　総合問題(5)

実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる2本の接線を引き，2つの接点を通る直線を l とする．

(1) 直線 l の方程式は $x+$ ア $ty=$ イ である．

(2) t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標は (ウ , エ) である．

＜ Note ＞

第 38 講　総合問題(6)

1 (1)　方程式 $2x^3-3x^2+1=a$（a は実数）が相異なる３つの実数解 α, β, γ（$\alpha<\beta<\gamma$）をもつとき，α, β, γ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

(2)　(1)のとき，$l=\gamma-\alpha$　を β のみを用いて表せ．また，l の動く範囲を求めよ．

＜ Note ＞

2　関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$　を考える．曲線 $C：y=f(x)$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$t\geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ．

(2)　(1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし　$p<q$）．このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ．

(3)　$t\geqq 0$ のとき，2 点 P，Q の間の距離の最小値を求めよ．

＜ Note ＞

3　$f(x)=2x^3+12x^2+18x+9$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A に関して点対称である．点 A を通る傾き m の直線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 A の座標を求めよ．

(2)　直線 l が関数 $y=f(x)$ のグラフと 3 点で交わる条件を求めよ．

(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積の和が 1 となるような m の値を求めよ．

＜ Note ＞

第38講　総合問題(6)

x の3次方程式 $x^3-3x-a=0$ の3解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ とする．定数 a を $0\leqq a\leqq 2$ の範囲で動かすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のとりうる値の範囲は

$-\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\leqq\alpha\leqq-\boxed{\text{イ}}$，　$-\boxed{\text{ウ}}\leqq\beta\leqq\boxed{\text{エ}}$，　$\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\leqq\gamma\leqq\boxed{\text{カ}}$

である．

(2) $\alpha+\beta$ の最大値は　$-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$　である．

＜ Note ＞

第39講　総合問題(7)

1　平面上の相異なる4点O，A，B，C　を考える．これら4点のうち3点A，B，Cは同一直線上にあり，　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}$

であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を求めよ．

(2)　三角形OBCの面積 S を求めよ．

< Note >

2　平行四辺形 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，かつ $\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$ であるとする．また s，t を実数とし，2 点 P，Q をそれぞれ　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　と定める．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　を t を用いて表せ．

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が 0 のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s を用いて表せ．

(3)　(2)の条件のもとで，さらに点 Q が線分 OB 上にあるような s の値の範囲を求めよ．

< Note >

3　すべての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える．この四面体について

$$\mathrm{OA}=\sqrt{3},\ \mathrm{OB}=2,\ \mathrm{OC}=\sqrt{5}$$

とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をそれぞれ求めよ．

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ．

＜ Note ＞

第 39 講　総合問題(7)

O を原点とする座標空間上の 3 点を　A(4, 2, 2), B(1, 3, 1), C(1, 1, 3) とする.

(1)　三角形 ABC の面積は [ア] $\sqrt{[イ]}$ である.

(2)　O から平面 ABC に垂線 OH を下ろし, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおくと,

$s=\dfrac{[ウ]}{[エ]}$, $t=\dfrac{[オ]}{[カ]}$ である. したがって, 四面体 OABC の体積は [キ] である.

＜ Note ＞

第40講　総合問題(8)

1 ［1］　12は$12=3+4+5$と連続する3つの自然数の和として表すことができる．88を連続する2つ以上の自然数の和として表せ．

［2］　自然数1，2，3，……，nから異なる2つを選ぶすべての組合せについて，2数の差の2乗をたし合わせたものをS_nとする．例えば
$S_3=(1-2)^2+(1-3)^2+(2-3)^2=6$　である．
次の問いに答えよ．

(1)　$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$　を利用して，$\sum_{k=1}^{n} k^3$　をnで表せ．

(2)　S_nを求めよ．

＜ Note ＞

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　n は 2 以上の自然数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

< Note >

3　関係式　$a_1=0$，$\dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=2n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

により定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$　に対して　$b_k=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}(1-\sqrt{a_{k+1}})$

とおく．このとき，すべての n に対して　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k<\sqrt{2}-1$　が成り立つことを示せ．

＜ Note ＞

第 40 講　総合問題(8)

等差数列 1，2，3，……，20 がある．

(1)　異なる 2 項の積の総和は **アイウエオ** である．

(2)　p，q を異なる項とするとき，$p\times q^2$ の総和は **カキクケコサ** である．

< Note >

第41講　総合問題(9)

1 　a を定数とする．関数　$f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$　の最小値を a を用いて表せ．

＜ Note ＞

2 ⑴　実数 x，y について，$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$　の最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

⑵　a を負の実数とする．$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$　を満たす x，y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x，y の値を求めよ．

＜ Note ＞

3 [1]　座標平面上で円 C：$x^2+(y-4)^2=16$　上の異なる2点P，Qに対し，線分PQを1：3に内分する点をMとする．下の問いに答えよ．

(1)　点Pを原点に固定して，点Qを円C上で動かしたときの点Mの軌跡を求めよ．

(2)　2点P，Qが円C上を動くとき，点Mが動く範囲を図示せよ．

[2]　2つの関数　$y=ax^2+b$，$y=|(x-1)(x+1)|$　のグラフが共有点をもつための必要十分条件を a，b を用いて表し，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を座標平面上に図示しなさい．

＜ Note ＞

第41講　総合問題(9)

※この講の練習問題より「実践問題」となります．講義問題の内容と必ずしも一致しません．

a を実数とする．x に関する方程式　$\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$　……①　が異なる2つの実数解をもつとき，a の取りうる値の範囲を求めたい．

①の真数条件により，$a>$ ア のとき $x>\dfrac{a+3}{4}$　　$a\leqq$ ア のとき $x>1$ である．

このとき①を変形すると　$(x-1)^{\boxed{イ}}=4x-a-3$　……②　である．左辺，右辺をそれぞれ x の関数と考えると，2つの関数のグラフの共有点の x 座標のうち，①の真数条件を満たすものが2つ存在すればよい．$a>$ ア のとき　グラフから②が異なる2実数解をもてばそれは必ず真数条件を満たすことがわかり，このとき a の取りうる値の範囲は

ウ $<a<$ エ である．同様に $a\leqq$ ア のときも考えて，求める a の範囲は

オ $<a<$ カ である

< Note >

第 42 講　総合問題⑽

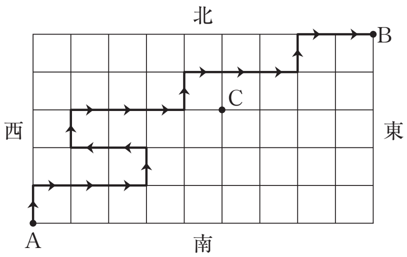
1　座標平面上に点 A(3, 0)，B(0, 4) がある．点 P が単位円 C：$x^2+y^2=1$ 上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△PAB の面積が最小となる点 P の座標を求めよ．

(2)　$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2$ が最小となる点 P の座標を求めよ．

< Note >

2　図のように東西に6本，南北に10本の道がある．東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする．A地点からB地点に進むとき，次の問いに答えよ．ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする．また，後戻りもできないとする．図の中の太線は道順の例を示したものである．



(1)　A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ．

(2)　C地点を通って，A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ．

(3)　A地点からB地点まで16区間で行く道順の総数を求めよ．

＜ Note ＞

3　数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ を

$a_1=2$，a_n が偶数のとき，$a_{n+1}=a_n+1$　……①，

a_n が奇数のとき　$a_{n+1}=2a_n$　……②

により定める．次の問いに答えよ．ただし，k は正の整数とする．

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5，a_6　を求めよ．

(2)　a_{2k} を用いて，a_{2k+2} を表せ．また，a_{2k-1} を用いて，a_{2k+1} を表せ．

(3)　a_{2k}，a_{2k-1} を求めよ．

＜ Note ＞

第 42 講　総合問題⑽

x が実数全体を動くとき，関数 $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+1}{\cos x-3\sin x+5}$ ……①がとる値の範囲を求めたい．

$X=\cos x$，$Y=\sin x$ とおくと，XY 平面において点 $(X,\ Y)$ の描く軌跡は円であり，また①は X，Y の 1 次式，すなわち直線を表す．この円と直線が共有点をもてば，その点に対し x，そして y が定まる．

したがって，求める y の範囲は

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\sqrt{\boxed{カキ}}\leqq y\leqq\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\sqrt{\boxed{カキ}}$ である．

＜ Note ＞

第43講　総合問題(11)

1　円に内接する四角形 ABCD があり，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3\sqrt{3}$，$CD=DA=\sqrt{7}$，$\angle ABC=60^\circ$ を満たしている．また，点 A と点 C を線分で結び，三角形 ABC の内接円の中心を I，その内接円と辺 BC との接点を E とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　IE，CE を求めよ．

(2)　点 I と点 D を線分で結ぶとき，ID を求めよ．

< Note >

2　実数 x，y が条件　$x^2+xy+y^2=6$　を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の最大値，最小値を求めよ．

＜ Note ＞

3 (1) 整数からなる公差１の等差数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものを求めよ.

(2) 0 でない整数からなる等比数列 a, b, c, d で $a^3+b^3+c^3=d^3$ を満たすものは存在しないことを示せ.

＜ Note ＞

第43講　総合問題(11)

$\{a_n\}$ は，初項 $a_1=-1$，公差 d の等差数列で，$\{b_n\}$ は，初項 $b_1=2011$，公比 r の等比数列とする．ただし，$d\neq 0$，$r\neq 0$　とする．これらの数列が
$a_nb_{n-1}+3b_na_{n-1}-2b_{n-1}=0$（$n\geqq 2$）を満たしている．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は　$a_n=$ [ア] $n-$ [イ]，　$b_n=2011\cdot\left(-\dfrac{[ウ]}{[エ]}\right)^{n-1}$ である．

(2)　$|b_n|<|a_n|$ となる最小の n の値は　$n=$ [オ] である．

＜ Note ＞

第44講　総合問題⑿

1　k を正の整数とする．$5n^2-2kn+1<0$　を満たす整数 n がちょうど1個であるような k をすべて求めよ．

＜ Note ＞

2　xy 平面の原点をOとする．xy 平面上のOと異なる点Pに対し，直線OP上の点Qを，次の条件(a)，(b)を満たすようにとる．

(a)　OP・OQ$=4$　　(b)　Qは，Oに関してPと同じ側にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点Pが直線 $x=1$ の上を動くとき，点Qの軌跡を求めて，図示せよ．

(2)　$a>r>0$ とする．点Pが円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ の上を動くとき，点Qの軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

＜ Note ＞

3　実数 a，b，c に対して，3 次関数　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　を考える．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

(2)　$f(2010)$，$f(2011)$，$f(2012)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

＜ Note ＞

第 44 講　総合問題⑿

正の整数 n，k に対し，n を k 個の整数の和で表す方法の総数を $p(n,\ k)$ で表す．ここで順番が異なっているだけのものは同じとみなす．また，$n<k$ のときは　$p(n,\ k)=0$ とする．たとえば 5 を 3 個の正の整数の和で表す方法は $5=1+1+3=1+2+2$　の 2 通りである．したがって　$p(5,\ 3)=2$　となる．

⑴　n が偶数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n}{\boxed{\text{ア}}}$　　　n が奇数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

である．

⑵　$n>3$ のとき，$n=a+b+c$（$a\leqq b\leqq c$，a，b，c は整数）と表すと，

$$p(n,\ 3)=p(n-1,\ 2)+p(n-3,\ 3)$$

が成り立つ．このことを利用すると，$p(6,\ 3)=\boxed{\text{エ}}$ である．

また，$n\geqq 2$ のとき　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}+p(6(n-1),\ 3)$　であることより，$p(6n,\ 3)$ を n の式で表すと　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{キ}}\,n^{\boxed{\text{ク}}}$　である．

＜ Note ＞

第 45 講　総合問題⒀

1　2 つの箱 A，B に赤玉と白玉が入っており，箱 A の赤玉と白玉の個数の比率は $p:1-p$ $(0<p<1)$，箱 B の赤玉と白玉の個数の比率は $q:1-q$ $(0<q<1)$ であるとする．この 2 つの箱のどちらかを選び，そこから玉を 1 個取り出して色を調べてもとに戻すという操作を繰り返し行うものとする．取り出した玉が赤玉であれば次は箱 A から玉を取り出すものとし，白玉であれば次は箱 B から玉を取り出すものとする．最初は箱 A から玉を取り出すことにしたとき，第 n 回目に赤玉を取り出す確率を a_n とする．$a_1=p$ である．

⑴　a_2 を p，q を用いて表せ．

⑵　a_{n+1} を a_n，p，q を用いて表せ．

⑶　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

2　$0 \leqq x \leqq 1$ において，連立不等式　$1-2x \leqq f(x)$，$x \leqq f(x)$，$f(x) \leqq 1$　を満たす２次関数 $f(x)$ で，定積分　$\int_0^1 f(x)dx$ の値が最小になるものを求めよ．またその最小値を求めよ．

< Note >

3　空間内に三角形 ABC と定点 O を中心とする半径 1 の球面 S とがある．点 P が S 上のすべての点を動くときの　$AP^2+BP^2+CP^2$　の最大値，最小値をそれぞれ M, m とするとき，次の問いに答えよ．ただし，三角形 ABC の重心 G は　$OG>1$　を満たすものとする．

(1)　$M=AQ^2+BQ^2+CQ^2$　となる S 上の点を Q，$m=AR^2+BR^2+CR^2$　となる S 上の点を R とするとき，3 点 Q，R，G は 1 直線上にあること示せ.

(2)　$\sqrt{M-(GA^2+GB^2+GC^2)}-\sqrt{m-(GA^2+GB^2+GC^2)}$ の値は三角形 ABC の形状および位置に無関係に定まることを示し，その値を求めよ．

＜ Note ＞

第 45 講　総合問題⒀

0，1，2，3，4，5　の 6 つの数字を重複せずに用いて，n 桁の整数を作る　($n \leqq 6$)．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n=3$，すなわち 3 桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも 5 にならないような整数は **アイ** 通りである．

(2)　$n=4$，すなわち 4 桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも 3 にならないような整数は **ウエオ** 通りである．

＜ Note ＞

第 46 講　総合問題⒁

1　$a>0$，$a\neq 1$　とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　正の実数 x，y に対して，$\log_a \dfrac{x+y}{2}$ と $\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)$　の大小関係を調べよ．

(2)　実数 x，y に対して，$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　が成り立つとき，$\dfrac{1}{x}$ および $\dfrac{1}{y}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　(2)において，$k=2x+y$　のとり得る値の範囲を求めよ．

(4)　$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　を満たす整数 x，y の値をすべて求めよ．

＜ Note ＞

2 a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$x_n=a$ となるとき，a を求めよ．

(2) $a<1$ のとき，$x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

＜ Note ＞

3　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ と定める．

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　x を正の有理数とし，$f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p，q を用いて　$f(x)=\dfrac{q}{p}$ と表す．このとき，$q \leqq 3$　となるような x をすべて求めよ．

< Note >

第46講　総合問題⑭

(1)　実数 x に関する連立不等式　$x \geqq -1,\ 2\cdot 3^{x} + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$　が解をもつような実数 a の範囲は　$a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$　である．

(2)　$x \geqq -1$　を満たすすべての実数 x に対し不等式　$3^{x} + a\cdot 3^{-x} \geqq a$　が成り立つような実数 a の範囲は　$-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \leqq a \leqq \boxed{\text{オ}}$　である．

＜ Note ＞

第 47 講　総合問題⒂

1　実数 a，b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$　とおく．

(1)　$a \neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$　を満たす実数 c を求めよ．

(2)　(1)で求めた c について，a，b が条件　$a<c<b$　を満たすとする．このとき，連立不等式

$$f(x)<0 \quad \text{かつ} \quad g(x)<0$$

が解をもつための必要十分条件を a，b を用いて表せ．

＜ Note ＞

2 xy 平面上に円 $C : x^2+(y+2)^2=4$ がある．中心 $(a,\ 0)$，半径 1 の円を D とする．C と D が異なる 2 点で交わるとき，次の問いに答えよ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) C と D の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

(3) a が(1)の範囲を動くとき，(2)の直線が通過する領域を図示せよ．

＜ Note ＞

3 [1]　係数 a, b が整数である 3 次方程式　$x^3+ax^2+bx+1=0$ が 2 つの虚数解と 1 つの整数解をもつ．これを満たす整数の組 $(a,\ b)$ はいくつあるか求めよ．またそのうち a の値が最大となるときの $(a,\ b)$ を求めよ．

[2]　2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ．

< Note >

第47講　総合問題⒂

三角形ABCにおいて $\angle A=\theta$，$\angle B=2\theta$ であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ を $\cos\theta$ を用いて表すと $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\boxed{\text{ア}}\cos\theta$ である．

(2) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}$ の値が最大となるとき，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(3) $\angle B$ の二等分線と辺ACとの交点をDとするとき，等式

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}+\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|}+\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|}$$

を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

< Note >

第48講　総合問題⑯

1　正の数 x に対して，3辺の長さが　$AB=x+1$，$BC=\sqrt{x^2+x+1}$，$CA=k\sqrt{x}$　で与えられる三角形ABCを考える．次の問いに答えよ．

(1)　$x=2$　のとき，三角形ABCが存在するような k の値の範囲を求めよ．

(2)　任意の正の数 t に対して不等式

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{3} \quad \cdots\cdots①$$

および　$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3} \quad \cdots\cdots②$$

が成立することを示せ．

(3)　(2)の結果を利用して，任意の正の数 x に対して三角形ABCが存在するような k の値の範囲を求めよ．

< Note >

2　関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$　により定める．

(1)　a，b は実数とする．$y=ax+b$　のグラフと　$y=f(x)$　のグラフがちょうど 2 つの交点を持つための a，b に対する条件を求めよ．

(2)　p，q は実数で $p>0$ とする．$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$　のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点を持つための p，q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ．

＜ Note ＞

3 平面上の点で，その座標が両方とも整数であるものを格子点と呼ぶ．原点をOとし，O以外の格子点Pに対して，線分OP上にあるOとP以外の格子点の個数を$n(\mathrm{P})$で表す．たとえば点P(2，3)については$n(\mathrm{P})=0$である．条件

$$1\leqq a\leqq 30 \quad \text{かつ} \quad 1\leqq b\leqq 30 \quad \text{かつ} \quad n(\mathrm{P})=4$$

をみたす格子点P$(a,\ b)$の個数を求めよ．

＜ Note ＞

第 48 講　総合問題⒃

a，b を定数とする関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が条件

(ア)　$f(1)=p$　(p は $p\geqq 1$ を満たす定数)　　(イ)　$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1)　定数 a がとる範囲を p を用いて表すと　$-$[ア]$-$[イ]$\sqrt{p}\leqq a\leqq p-$[ウ]　である．

(2)　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ が最小値をとるとき，$b=$[エ]である．また，その最小値が 2 となるのは　$p=\dfrac{\text{[オカ]}}{4}$　のときである．

(3)　p が(2)で求められた値をもつとき，定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ の最大値は　$\dfrac{\text{[キク]}}{\text{[ケコ]}}$　である．

＜ Note ＞

テキスト解答

第25講　数列(3)

1　数列 $\{a_n\}$：1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$, …… を次のような群に分け，第 m 群には m 個の数が入るようにする．

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\Big|\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\Big|\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\Big|,\ \cdots\cdots,\ \Big|\frac{1}{m},\ \frac{2}{m-1},\ \cdots\cdots,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m}{1}\Big|,\ \cdots\cdots$$

(1)　数列 $\{a_n\}$ において $\frac{q}{p}$ は第何項か．ただし，$\frac{q}{p}$ は，例えば $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ のように約分しないものとする．

(2)　a_{100} を求めよ．

第 m 群の各項は，分母と分子の和が $m+1$ である．

また，第 m 群の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $1+2+3+\cdots\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$ (項) である．

(1)　$\frac{q}{p}$ は第 $(p+q-1)$ 群の q 番目の項である．

$p+q\geqq 3$ のとき，第 $(p+q-2)$ 群までに　$\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)$ 項ある．

したがって　$\frac{q}{p}$ は　**第 $\boldsymbol{\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q}$ 項**である（$p=q=1$ のときもこれでよい）．

(2)　a_{100} が第 m 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(m-1)m<100\leqq\frac{1}{2}m(m+1)\qquad (m-1)m<200\leqq m(m+1)$$

$13\times14=182$，$14\times15=210$　より，これを満たす m は $m=14$

第13群までに　$\frac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$ (項) ある．

よって　a_{100} は第14群の　$100-91=9$ (番目) の項である．

したがって　$a_{100}=\frac{9}{15-9}=\boldsymbol{\frac{9}{6}}$

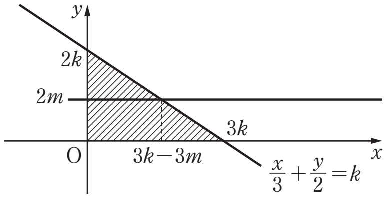
2　k を0以上の整数とし，$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k$ を満たす0以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする．a_k を k の式で表せ．

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k$，$x\geqq0$，$y\geqq0$ を満たす領域を D とし，領域 D 内で $y=l$（$0\leqq l\leqq 2k$，l は整数）にある格子点の個数を b_l とする．

以下，m を整数とする．

(i)　$l=2m$（$0\leqq m\leqq k$）のとき

$b_l=(3k-3m)-0+1$

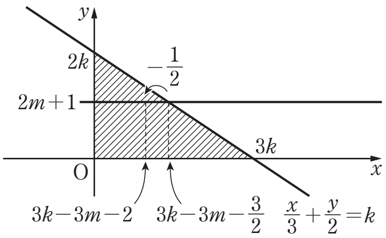


$=-3m+(3k+1)$

(ii) $l=2m+1$ $(0\leqq m\leqq k-1)$ のとき

$b_l=(3k-3m-2)-0+1$

$=-3m+(3k-1)$



よって　$a_k=\sum_{l=0}^{2k}b_l$

$=\sum_{m=0}^{k}\{-3m+(3k+1)\}+\sum_{m=0}^{k-1}\{-3m+(3k-1)\}$

$=\{(3k+1)+(3k-2)+\cdots\cdots+1\}+\{(3k-1)+(3k-4)+\cdots\cdots+2\}$

$=\frac{k+1}{2}(3k+1+1)+\frac{k}{2}(3k-1+2)$

$=\boldsymbol{3k^2+3k+1}$

3　自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2)　自然数 m について，$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{m^2}$ を，m を用いて表せ．

---

(1)　$\sqrt{1}=1$ 以下の最大の整数は 1　　よって，$\boldsymbol{a_1=1}$

$\sqrt{2}=1.41\cdots$ 以下の最大の整数は 1　　よって，$\boldsymbol{a_2=1}$

$\sqrt{3}=1.73\cdots$ 以下の最大の整数は 1　　よって，$\boldsymbol{a_3=1}$

$\sqrt{4}=2$ 以下の最大の整数は 2　　よって，$\boldsymbol{a_4=2}$

(2)　$a_n=k$ となるのは　$n=k^2,\ k^2+1,\ k^2+2,\ \cdots\cdots,\ (k+1)^2-1$　の

$(k+1)^2-1-k^2+1=2k+1$ (個) である．

また，$a_{m^2}=m$ であり，a_{m^2} は $a_n=m$ となる最初の項である．

よって

$$S=\sum_{k=1}^{m-1}k(2k+1)+m=2\cdot\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m+m=\boldsymbol{\frac{m(4m^2-3m+5)}{6}}$$

第 26 講　数列(4)

1　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項，および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\{3a_{n+1}+4(n+1)\}-(3a_n+4n)$

$=3(a_{n+1}-a_n)+4=3b_n+4$　　よって　$\boldsymbol{b_{n+1}=3b_n+4}$　……①

(2)　$b_1=a_2-a_1=(3a_1+4\cdot1)-1=6$

また①は　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$ と変形できる．

よって　$\{b_n+2\}$ は　初項 $b_1+2=8$　公比 3 の等比数列である．

したがって　$b_n+2=8\cdot3^{n-1}$　より　$\boldsymbol{b_n=8\cdot3^{n-1}-2}$

また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ より　$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列である．

よって　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$

$$=4\cdot3^{n-1}-2n-1$$　（$n=1$ のときにも成り立つ）

したがって　$\boldsymbol{a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1}$

2　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n と表すとき，すべての自然数 n について

$$3S_n=a_n+7\cdot3^n-6$$

が成立するとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} を a_n および n の式で表せ．

(2)　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_n の一般項を求めよ．

$3S_n=a_n+7\cdot3^n-6$

$n=1$ のとき　$3S_1=a_1+7\cdot3^1-6$　つまり　$3a_1=a_1+7\cdot3^1-6$　　よって　$a_1=\dfrac{15}{2}$

(1)　$3a_{n+1}=3S_{n+1}-3S_n=(a_{n+1}+7\cdot3^{n+1}-6)-(a_n+7\cdot3^n-6)$

$2a_{n+1}=-a_n+14\cdot3^n$　　よって　$\boldsymbol{a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+7\cdot3^n}$　……①

(2)　①の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{3^{n+1}}+7\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{7}{3}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{7}{3}$，$b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{5}{2}$

$b_{n+1}-2=-\frac{1}{6}(b_n-2)$，$b_1-2=\frac{1}{2}$

よって　$b_n-2=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$　より　$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}+2}$

3　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$　…①　（$n=1, 2, 3, \cdots$）　によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

①は

$$\begin{cases} a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n & \cdots\cdots ② \\ a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

と変形できる．

$a_2+2a_1=6$ より　②から　$a_{n+1}+2a_n=6$

$a_2-a_1=3$ より　③から　$a_{n+1}-a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

この２式より　$a_n=\frac{1}{3}\{6-3\cdot(-2)^{n-1}\}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2-(-2)^{n-1}}$

第 27 講　高次方程式

1　整式 $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$，$x-2$ で割ると余りが 3 となる．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを求めよ．

(2)　$P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割った余りを求めよ．

$P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$ であることより

$P(x)=(x+1)^2Q_1(x)+5x+2$　とおける．したがって，$P(-1)=-3$　……①

また，$P(x)$ は $x-2$ で割ると余りが 3 であることより

$P(x)=(x-2)Q_2(x)+3$　とおける．したがって，$P(2)=3$　……②

(1)　求める余りを $ax+b$ とおくと，$P(x)=(x+1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$

①，②より　$P(-1)=-a+b=-3$　　$P(2)=2a+b=3$

よって　$a=2$，$b=-1$　　したがって求める余りは　$\boldsymbol{2x-1}$

(2)　$P(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると余りが $5x+2$ であることより

$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q_4(x)+(x+1)^2\cdot c+5x+2$　とおける．

②より　$P(2)=9c+12=3$　　$c=-1$

したがって求める余りは　$-(x+1)^2+5x+2=\boldsymbol{-x^2+3x+1}$

2　$a+b+c=2$　……①，$ab+bc+ca=3$　……②，$abc=2$　……③　のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a^2+b^2+c^2$　および　$a^3+b^3+c^3$ の値を求めよ．

(2)　3 次方程式　$x^3+Ax^2+Bx+C=0$ が $x=a$，b，c を解にもつとき，A，B，C の値を求めよ．

(3)　$a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

(1)　$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2^2-2\cdot 3=\boldsymbol{-2}$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc=2(-2-3)+3\cdot 2=\boldsymbol{-4}$

(2)　$x=a$，b，c を 3 解にもつ 3 次方程式の 1 つは $(x-a)(x-b)(x-c)=0$ である．

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$

①～③より　$x^3-2x^2+3x-2=0$　……④

これと　$x^3+Ax^2+Bx+C=0$　を係数比較して　$\boldsymbol{A=-2,\ B=3,\ C=-2}$

(3)　④は　$(x-1)(x^2-x+2)=0$　と変形できる．よって④の解の 1 つは　$x=1$　である．

対称性により $c=1$ とすると，①より　$a+b=1$　　③より　$ab=2$

また(1)より　$a^2+b^2=-2-c^2=-3$　　$a^3+b^3=-4-c^3=-5$

よって　$a^5+b^5+c^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)+1$

$=-5\cdot(-3)-4\cdot 1+1$

$=\boldsymbol{12}$

3　a，b を実数とする．方程式 $x^3+(a+1)x^2+(2a+b-1)x+2b+2=0$　……①　は実数解と虚数解をもつとする．このとき，次の問いに答えよ． (1)　方程式①の実数解を求めよ． (2)　a，b が満たす不等式を求めよ． (3)　a，b がともに整数で，$b \leqq 1$ であるような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(1)　①は　$(x+2)\{x^2+(a-1)x+b+1\}=0$　と変形できる．

この方程式が実数解と虚数解をもつので，実数解は　$\boldsymbol{x=-2}$

(2)　$x^2+(a-1)x+b+1=0$　が虚数解をもつので，判別式を D とすると

$D<0$　つまり　$(a-1)^2-4(b+1)<0$

したがって　$\boldsymbol{(a-1)^2<4(b+1)}$　……②

(3)　②の左辺は０以上であることより，②を満たす $(a,\ b)$ が存在するのは

$4(b+1)>0$　つまり　$b>-1$　であることが必要．

これと　$b \leqq 1$ より　$-1<b \leqq 1$　　これを満たす整数 b は　$b=0,\ 1$ のみ

$b=0$ のとき　②より　$(a-1)^2<4$　　これを満たす整数 a は　$a=0,\ 1,\ 2$

$b=1$ のとき　②より　$(a-1)^2<8$　　これを満たす整数 a は　$a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

したがって，求める $(a,\ b)$ の組は

$(a,\ b)=$ **(−1，1)，(0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1)，(2，0)，(2，1)，(3，1)**

第 28 講　証明(1)

1　n は自然数とする．次の(1)～(4)の不等式をそれぞれ示せ．

(1)　$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)}<n+2$

(2)　$n+3<\sqrt[3]{(n+1)(n+4)(n+6)}$

(3)　$n+3<\sqrt[3]{(n+2)(n+3)(n+5)}$

(4)　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

(1)～(4)の不等式において，各辺はすべて正である．

(1)　$(n+2)^3-(n+1)(n+2)(n+3)=(n+2)\{(n+2)^2-(n+1)(n+3)\}=n+2>0$

よって　$(n+1)(n+2)(n+3)<(n+2)^3$　より示された．

(2)　$(n+1)(n+4)(n+6)-(n+3)^3$

$=(n^2+5n+4)(n+6)-(n+3)^3$

$=n^3+11n^2+34n+24-(n^3+9n^2+27n+27)$

$=2n^2+7n-3\geqq 2\cdot 1^2+7\cdot 1-3=6>0$

よって　$(n+3)^3<(n+1)(n+4)(n+6)$　より示された．

(3)　$(n+2)(n+3)(n+5)-(n+3)^3$

$=(n+3)\{(n+2)(n+5)-(n+3)^2\}=(n+3)(n+1)\geqq 4\cdot 2=8>0$

よって　$(n+3)^3<(n+2)(n+3)(n+5)$　より示された．

(4)　(2)，(3) より　$(n+3)^2<\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

よって　$n+3<\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}$

また，(1)において n を $n+3(>0)$ に置き換えると

$\sqrt[3]{(n+4)(n+5)(n+6)}<n+5$　　これと(1)より

$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<(n+2)(n+5)$

ここで　$\left(n+\dfrac{7}{2}\right)^2-(n+2)(n+5)=\dfrac{9}{4}>0$　より

$$\sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<\left(n+\frac{7}{2}\right)^2$$

よって　$\sqrt[6]{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}<n+\dfrac{7}{2}$

以上より示された．

2　[1]　a，b，c，x，y，z を実数とする．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$　……①　が成り立つことを示せ．

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$　の最小値を求めよ．

(1)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$

$\quad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2cazx+a^2z^2$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\geqq 0$

等号成立は　$ay=bx$　かつ　$bz=cy$　かつ　$cx=az$

つまり　$a:b:c=x:y:z$　のとき.

よって示された.

(2)　①で $a=b=c=1$　のとき

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2=1 \qquad \text{よって}\quad x^2+y^2+z^2\geqq\frac{1}{3}$$

等号成立は　$x:y:z=1:1:1$　のとき.

これと　$x+y+z=1$　より　$x=y=z=\dfrac{1}{3}$　のとき.

したがって求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

---

2 [2]　$x\neq 0$ とするとき，$k=x+\dfrac{1}{x}$ のとり得る値の範囲を求めよ.

$x>0$ のとき　$k=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$　　よって　$k\geqq 2$

$x<0$ のとき　$-k=-x-\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)}=2$　　よって　$-k\geqq 2$　より　$k\leqq -2$

したがって　$\boldsymbol{k\leqq -2,\ 2\leqq k}$

---

3 [1]　x，y は実数とする．$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ であることを示せ.

$3-(x^2-2x+y^2)=3+2x-(x^2+y^2)$

ここで，$x^2+y^2<1$　のとき　$-(x^2+y^2)>-1$

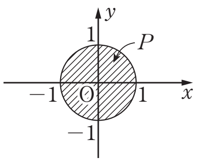
よって　$3+2x-(x^2+y^2)>3+2x-1=2x+2$

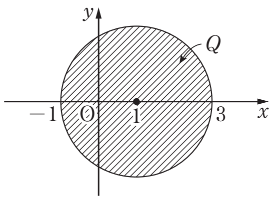
また，$x^2+y^2<1$　のとき　$y^2<1-x^2$　　よって　$1-x^2>0$ より　$-1<x<1$

したがって　$2x+2>2\cdot(-1)+2=0$

ゆえに　$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ である.

【別解】　$x^2+y^2<1$，$(x-1)^2+y^2<4$　が表す領域をそれぞれ P，Q とすると，P，Q の表す領域は右図斜線部分（境界は含まない）.





よって　$P\subset Q$ より

$x^2+y^2-1<0$　ならば　$x^2-2x+y^2<3$ である.

3 [2]　不等式 $ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx \geqq 0$ が任意の実数 x，y，z に対して常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x,\ y,\ z)=ax^2+y^2+az^2-xy-yz-zx$

$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+(a-1)x^2+(a-1)z^2$

$=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}+(a-1)x^2+(a-1)z^2$　とおくと

$f(x,\ y,\ z) \geqq 0$　が任意の実数 x，y，z で成り立つのは　$a-1 \geqq 0$　つまり　$a \geqq 1$　のとき．

また，$a<1$ のとき，$f(x,\ y,\ z) \geqq 0$　が成り立たない例として　$x=y=z=1$　が存在する．

よって求める a の範囲は　$\boldsymbol{a \geqq 1}$

第29講　証明(2)

[1] 関数　$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$　について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$ を示せ．

(2)　すべての自然数 n に対して　$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数であることを，数学的帰納法で示せ．ただし，有理数 r, s を用いて表される実数 $r+s\sqrt{2}$ は　$s\neq0$　ならば無理数であることを，証明なく用いてもよい．

(1)　$\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}=\dfrac{2\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}}{1+\left(\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\right)^2}=\dfrac{2(2^x+1)(2^x-1)}{(2^x+1)^2+(2^x-1)^2}=\dfrac{2(2^{2x}-1)}{2\cdot2^{2x}+2}=\dfrac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=f(2x)$

よって　$f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$

(2)「$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数である」 ……①　について

(I)　$n=1$ のとき　$b_1=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2^{\frac{1}{2}}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

これは無理数より

$n=1$ のとき①は成り立つ．

(II)　$n=k$ のとき　①が成り立つ，つまり　b_k は無理数であるとする．

(1)より　$b_k=f\left(\dfrac{1}{2^k}\right)=f\left(2\cdot\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)=\dfrac{2f\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)}{1+f\left(\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)^2}=\dfrac{2b_{k+1}}{1+{b_{k+1}}^2}$

ここで　b_{k+1} が有理数であるとすると　$\dfrac{2b_{k+1}}{1+{b_{k+1}}^2}$

つまり　b_k も有理数となり矛盾する．

したがって　b_{k+1} も無理数である．つまり　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

(I)，(II)より　すべての自然数 n に対して　$b_n=f\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ は無理数である．

[2] n を自然数とする．

(1)　不等式　$\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n\geqq3$　が成り立つことを証明せよ．

(2)　不等式　$(n+1)^{n-1}(n+2)^n\geqq3^n(n!)^2$　が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(1)　$\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{2}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\dfrac{2}{n}\right)^n$

$$=1+n\cdot\frac{2}{n}+\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{2^2}{n^2}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n$$

$$=3+\frac{2(n-1)}{n}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n\geqq 3$$　等号成立は　$n=1$ のとき．

よって　$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\geqq 3$　である．

(2)　$(n+1)^{n-1}(n+2)^n\geqq 3^n(n!)^2$　……①　について

(Ⅰ)　$n=1$ のとき　①の左辺，右辺ともに 3 より①は成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k$ のとき　①が成り立つとすると

$(k+1)^{k-1}(k+2)^k\geqq 3^k(k!)^2$

このとき

$$(k+2)^k(k+3)^{k+1}=(k+1)^{k-1}(k+2)^k\cdot\frac{(k+3)^{k+1}}{(k+1)^{k-1}}$$

$$\geqq 3^k(k!)^2\cdot\frac{(k+3)^{k+1}}{(k+1)^{k-1}}=3^k(k!)^2\cdot(k+1)^2\cdot\left(\frac{k+3}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$=3^k\{(k+1)!\}^2\cdot\left(1+\frac{2}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$\geqq 3^k\{(k+1)!\}^2\cdot 3$$　((1)より)

$$=3^{k+1}\{(k+1)!\}^2$$　より

$(k+2)^k(k+3)^{k+1}\geqq 3^{k+1}\{(k+1)!\}^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，すべての自然数 n で①は成り立つ．

3　a，b を実数とする．関数　$f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{\sqrt{5}}$ は　$f(1)=1$，$f(2)=1$ を満たすとする．

(1)　a，b の値を求めよ．

(2)　$f(2)+f(3)=f(4)$　が成り立つことを示せ．

(3)　x が自然数のとき，$f(x)$ も自然数となることを示せ．

(1)　$f(1)=1$ より　$\dfrac{a-b}{\sqrt{5}}=1$　　よって　$a-b=\sqrt{5}$

$f(2)=1$ より　$\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{5}}=1$　　$(a+b)(a-b)=\sqrt{5}$　　よって　$a+b=1$

したがって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$，　$\boldsymbol{b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$

(2)　$ab=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=-1$

$$f(4)=\frac{a^4-b^4}{\sqrt{5}}=\frac{(a^3-b^3)(a+b)-ab(a^2-b^2)}{\sqrt{5}}=\frac{a^3-b^3}{\sqrt{5}}+\frac{a^2-b^2}{\sqrt{5}}=f(3)+f(2)$$

よって　$f(2)+f(3)=f(4)$ である．

(3)　$f(x+2)=\dfrac{a^{x+2}-b^{x+2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{(a^{x+1}-b^{x+1})(a+b)-ab(a^{x}-b^{x})}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{a^{x+1}-b^{x+1}}{\sqrt{5}}+\dfrac{a^{x}-b^{x}}{\sqrt{5}}$

よって　$f(x+2)=f(x+1)+f(x)$ が成り立つ.

したがって，$f(x)$，$f(x+1)$ が自然数のとき，$f(x+2)$ も自然数となる.

$f(1)$，$f(2)$ は自然数より，帰納的にすべての自然数 x で $f(x)$ は自然数となる.

よって示された.

第30講　整数問題(1)

1 ［1］　5^n が 30! の約数となるような自然数 n のうち最大のものを求めよ.

1から30のうち，5の倍数は　5×1，5×2，5×3，5×4，5×5，5×6　の6個である.

よって，30! は素因数5を7個もつ．したがって求める n の最大値は　$\boldsymbol{n=7}$

【別解】　1から30のうち，5の倍数は　$30\div5=6$ より　6個

$5^2=25$ の倍数は　$30\div25=1\cdots5$　より　1個

よって，30! は素因数5を7個もつ．したがって求める n の最大値は　$\boldsymbol{n=7}$

1 ［2］　n が3以上の奇数のとき，n^3-n は24で割り切れることを示せ.

$n=2m+1$（m は自然数）とおくと

$$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$$
$$=2m(2m+1)(2m+2)=4m(m+1)(2m+1)$$

$m(m+1)$ は連続2整数の積より2の倍数．よって　n^3-n は8の倍数である.

また，$(n-1)n(n+1)$ は連続3整数の積より6の倍数.

よって　n^3-n は6の倍数，すなわち3の倍数である.

したがって　n^3-n は24の倍数である.

2　33^{20} を90で割ったときの余りを求めよ.

$$33^{20}=(3+30)^{20}$$
$$={}_{20}C_0\cdot3^{20}+{}_{20}C_1\cdot3^{19}\cdot30^1+{}_{20}C_2\cdot3^{18}\cdot30^2+\cdots\cdots+{}_{20}C_{20}\cdot30^{20}$$
$$=3^{20}+{}_{20}C_1\cdot3^{18}\cdot90+{}_{20}C_2\cdot3^{19}\cdot10\cdot90+\cdots\cdots+30^{18}\cdot10\cdot90$$
$$=3^{20}+(90\text{の倍数})$$

よって　33^{20} を90で割った余りは，3^{20} を90で割った余りに等しい.

$$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$$
$$=9\cdot9^9=9(10-1)^9=9\cdot\{10^9+{}_9C_1\cdot10^8\cdot(-1)^1+\cdots\cdots+{}_9C_8\cdot10^1\cdot(-1)^8+(-1)^9\}$$
$$=9\{(10\text{の倍数})-1\}=(90\text{の倍数})-9=(90\text{の倍数})+81$$

よって求める余りは　**81**

3 ［1］　n を2以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ.

$$n^4+4=(n^2)^2+4$$
$$=(n^2)^2+4n^2+4-4n^2$$
$$=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$$

$n\geqq2$ のとき　$n^2+2n+2\geqq2^2+2\cdot2+2=10\geqq2$

$n^2-2n+2=(n-1)^2+1\geqq2$

よって　n^4+4 は2以上の2整数の積で表すことができる.

したがって　n^4+4 は素数ではない.

> 3 ［2］ 3 より大きな素数 p について，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを調べたい.
> (1) $p=5,\ 7,\ 11$ に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りを求めよ.
> (2) (1)の結果から，一般に 3 より大きな素数 p に対して，p^2 を 12 で割ったときの余りがどうなるかを予想し，さらにその予想が正しいことを証明せよ.

(1) $p=5$ のとき　$p^2=25=12\cdot 2+1$

$p=7$ のとき　$p^2=49=12\cdot 4+1$

$p=11$ のとき　$p^2=121=12\cdot 10+1$

よって　$p=5,\ 7,\ 11$ に対して，p^2 を 12 で割った余りはすべて **1** である.

(2) (1)より 3 より大きな素数 p に対して，p^2 を 12 で割った余りは **1** であると予想できる.

3 より大きな素数は奇数より，p を 6 で割った余りで分類すると

$p=6k+1,\ 6k+3,\ 6k-1$ （k は自然数）のいずれかで表せる.

また，$6k+3=3(2k+1)$ は 3 より大きい 3 の倍数より素数ではない.

よって　$p=6k+1,\ 6k-1$ のいずれかで表せる.

このとき　$p^2=(6k\pm1)^2=36k^2\pm12k+1=12(3k^2\pm k)+1$（複号同順）より

3 より大きな素数 p に対して，p^2 を 12 で割った余りは 1 である.

よって予想は正しいことが証明された.

第31講　整数問題(2)

> **1** [1]　n を自然数とするとき，$\dfrac{4n+1}{2n-1}$ は整数値 a をとるものとする．a の最大値を求めよ．

$\dfrac{4n+1}{2n-1}=2+\dfrac{3}{2n-1}$　これが整数値 a をとるのは，$2n-1$ が3の約数のとき．

また，$n\geqq1$ より $2n-1\geqq1$　　よって　$2n-1=1,\ 3$　　つまり $n=1,\ 2$　に限られる．

このときそれぞれ $a=5,\ 3$　　したがって，a の最大値は **5**

> **1** [2]　(1)　$xy=2x+2y+2$ を満たす自然数 x，y の組，および整数 x，y の組はそれぞれ何組あるか．ただし，$x\geqq y$ とする．
>
> (2)　$\sqrt{n^2+27}$ が整数であるような自然数 n をすべて求めよ．

(1)　$xy=2x+2y+2$ より

$xy-2x-2y-2=0$　　$(x-2)(y-2)=6$

$x\geqq y$　より　$x-2\geqq y-2$

よって　$(x-2,\ y-2)=(6,\ 1),\ (3,\ 2),\ (-1,\ -6),\ (-2,\ -3)$

したがって　$(x,\ y)=(8,\ 3),\ (5,\ 4),\ (1,\ -4),\ (0,\ -1)$

ゆえに　自然数 x，y の組は **2組**　　整数 x，y の組は **4組**

(2)　$\sqrt{n^2+27}=k$　(k は0以上の整数）とおく．

$n^2+27=k^2$　　$k^2-n^2=27$　　$(k+n)(k-n)=27$

n は自然数より　$k+n>k-n$　　また　$k+n>0$

よって　$(k+n,\ k-n)=(27,\ 1),\ (9,\ 3)$

したがって　$(k,\ n)=(14,\ 13),\ (6,\ 3)$　　ゆえに　$\boldsymbol{n=13,\ 3}$

> **2**　3で割ると2余り，5で割ると3余り，11で割ると9余る整数のうちで，1000を越えない最大のものを求めよ．

求める整数を N とすると，整数 a，b，c を用いて

$N=3a+2$　……①　　$N=5b+3$　……②　　$N=11c+9$　……③　と表せる．

①，②より

$3a+2=5b+3$　　$3(a-2)=5(b-1)$

3，5は互いに素より，$a-2$ は5の倍数

よって　$a-2=5k$　　つまり　$a=5k+2$（k は整数）と表せる．

このとき　①より　$N=3(5k+2)+2=15k+8$　……①′

これと③より

$15k+8=11c+9$

　$15(k-3)=11(c-4)$

　15，11 は互いに素より，$k-3$ は 11 の倍数

　よって　$k-3=11l$　つまり　$k=11l+3$　(l は整数) と表せる．

このとき　①′より　$N=15(11l+3)+8=165l+53$

これが表す 1000 を超えない最大の整数は　$N=165\cdot5+53=\mathbf{878}$

3　方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　……①　を満たす自然数の組　$(x,\ y,\ z)$ について考える． (1)　$x=1$　のとき，正の整数 y，z の組をすべて求めよ． (2)　x のとり得る値の範囲を求めよ． (3)　方程式①を解け．

(1)　$x=1$ のとき　①より　$\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{3}$

　$2yz-2y-3z=0$　　$(2y-3)(z-1)=3$

　$z\geqq1$ より　$z-1\geqq0$　　よって　$(2y-3,\ z-1)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

したがって　$\boldsymbol{(y,\ z)=(2,\ 4),\ (3,\ 2)}$

(2)　$y\geqq1$，$z\geqq1$ であることより，①から

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\leqq\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot1}=\frac{5}{6}\quad\cdots\cdots②$$

よって　$\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{5}{6}$　　$\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{2}$　　$x\leqq2$　　したがって　$\boldsymbol{1\leqq x\leqq2}$

(3)　$x=2$ のとき②で等号が成り立つので　$(y,\ z)=(1,\ 1)$

これと　$x=1$ のときの(1)の結果より

　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 1)}$

第32講　整数問題(3)

1　自然数 n に対し，$a_n=2^{3n+3}-3^{n+1}$ とおく．すべての a_n を割り切る自然数のうち最大のものを求めよ．

$a_1=2^6-3^2=64-9=55=5\times11$　　$a_2=2^9-3^3=512-27=485=5\times97$

よって，自然数 n に対しすべての a_n を割り切る自然数のうち最大のものは5と予想される．

$a_n=2^{3(n+1)}-3^{n+1}$

$=8^{n+1}-3^{n+1}=(8-3)(8^n+8^{n-1}\cdot3+8^{n-2}\cdot3^2+\cdots\cdots+3^n)=(5の倍数)$

よってすべての a_n は5で割り切れる．したがって求める最大の自然数は**5**

2　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする．

$a_1=4,\ b_1=3,\ a_{n+1}=4a_n-3b_n,\ b_{n+1}=3a_n+4b_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2)　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに5の倍数であることを証明せよ．

(3)　a_n も b_n も5の倍数ではないことを証明せよ．

(1)　$a_2=4a_1-3b_1=4\cdot4-3\cdot3=\mathbf{7}$　　$b_2=3a_1+4b_1=3\cdot4+4\cdot3=\mathbf{24}$

$a_3=4a_2-3b_2=4\cdot7-3\cdot24=\mathbf{-44}$　　$b_3=3a_2+4b_2=3\cdot7+4\cdot24=\mathbf{117}$

$a_4=4a_3-3b_3=4\cdot(-44)-3\cdot117=\mathbf{-527}$　　$b_4=3a_3+4b_3=3\cdot(-44)+4\cdot117=\mathbf{336}$

(2)「すべての自然数 n で　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに5の倍数である」……①　を示す．

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　$a_5=4a_4-3b_4=-3116$　　$b_5=3a_4+4b_4=-237$ より

$a_5-a_1=-3120=5\cdot(-624)$　　$b_5-b_1=-240=5\cdot(-48)$

よって①は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$a_{k+4}-a_k=5k$　　$b_{k+4}-b_k=5l$（k，l は整数）とおける．

このとき　$a_{k+5}-a_{k+1}=(4a_{k+4}-3b_{k+4})-(4a_k-3b_k)=4(a_{k+4}-a_k)-3(b_{k+4}-b_k)$

$=4\cdot5k-3\cdot5l=5(4k-3l)$

$b_{k+5}-b_{k+1}=(3a_{k+4}+4b_{k+4})-(3a_k+4b_k)=3(a_{k+4}-a_k)+4(b_{k+4}-b_k)$

$=3\cdot5k+4\cdot5l=5(3k+4l)$

よってともに5の倍数であり，①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［Ⅰ］，［Ⅱ］より　①はすべての自然数 n で成り立つ．よって示された．

(3)　(2)より　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに5の倍数，すなわち a_{n+4} と a_n，b_{n+4} と b_n はそれぞれ5で割った余りが等しい．

a_1，a_2，a_3，a_4 および b_1，b_2，b_3，b_4 はいずれも5の倍数ではない．

したがって，すべての自然数 n で a_n も b_n も5の倍数ではない．

3　直角三角形 ABC は，∠C が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2)　tan∠A と tan∠B は，いずれも整数にならないことを示せ．

(1)　BC$=p$，AB$=c$，CA$=b$（b，c は自然数）とすると，三平方の定理により

$$p^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

$c+b>0$，$c-b>0$ であり，$c+b>c-b$

p は素数，すなわち 1 と p 以外に約数をもたないので，p^2 を異なる 2 数の積で表す方法は $p^2\times1$ のみである．

よって　$c+b=p^2$　　$c-b=1$

したがって　AB$=c=\boldsymbol{\dfrac{p^2+1}{2}}$　　CA$=b=\boldsymbol{\dfrac{p^2-1}{2}}$

(2)　$\tan\angle A=\dfrac{p}{b}=\dfrac{2p}{p^2-1}=\dfrac{2p}{(p+1)(p-1)}$　……①

$\tan\angle B=\dfrac{b}{p}=\dfrac{(p+1)(p-1)}{2p}$　……②

p は 3 以上の素数，すなわち奇数より，$p+1$，$p-1$ は偶数．

よって①，②はともに 2 で 1 回約分できる．

その約分後に，$p+1$，$p-1$ のいずれか残った方と p は約分することができない．

よって，①の分母には　$p+1$，$p-1$（ともに偶数）のいずれかが残り，

②の分母には　p（3 以上の奇数）が残る．

したがって，tan∠A，tan∠B はいずれも整数にならない．

第33講　総合問題(1)

1　a は $a>-\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とし，$f(x)=x^2-2ax$ とおく．

(1)　2次関数　$y=f(x)$　のグラフの頂点の座標を求めよ．

(2)　2次不等式　$f(x) \geqq x$　を解け．

(3)　x が $f(x) \geqq x$　を満たす範囲を動くとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

$f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2=x(x-2a)$　$\left(a>-\dfrac{1}{2}\right)$

(1)　グラフの頂点は　$\boldsymbol{(a,\ -a^2)}$

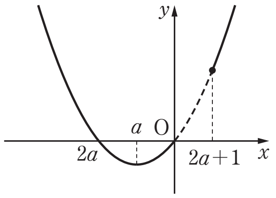
(2)　$f(x) \geqq x$ より　$x^2-2ax \geqq x$　　$x^2-(2a+1)x \geqq 0$　　$x\{x-(2a+1)\} \geqq 0$

$a>-\dfrac{1}{2}$ より　$2a+1>0$　　よって　$\boldsymbol{x \leqq 0,\ 2a+1 \leqq x}$　……①

(3)　(i)　$-\dfrac{1}{2}<a<0$ のとき

$0<2a+1$ より，①における $y=f(x)$ のグラフは右図．

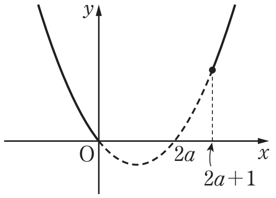
よって最小値は　$f(a)=-a^2$



(ii)　$0 \leqq a$ のとき

①における $y=f(x)$ のグラフは右図．

よって最小値は　$f(0)=0$



以上より　求める最小値は　$-\dfrac{1}{2}<a<0$ のとき $\boldsymbol{-a^2}$　　$0 \leqq a$ のとき $\boldsymbol{0}$

2　座標平面上の3点 $(0,\ 0)$，$(6,\ 0)$，$(0,\ 6)$ を頂点とする三角形と4点 $(0,\ t)$，$(0,\ t-4)$，$(4,\ t-4)$，$(4,\ t)$ を頂点とする正方形の共通部分の面積を $S(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$S(2)$ と $S(6)$ の値を求めよ．

(2)　$S(t)$ を最大にする t の値と，$S(t)$ の最大値 M を求めよ．

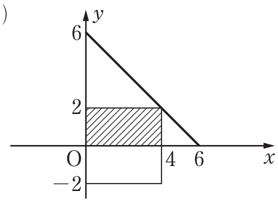
(3)　$2 \leqq t \leqq 5$ のとき，$S(t)=S(t+1)$ を満たす t の値を求めよ．

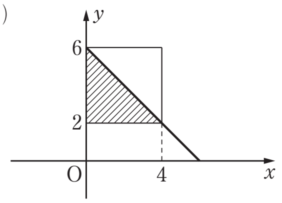
(1)　$t=2$ のとき　共通部分は図(i)

よって　$S(2)=4 \cdot 2=\boldsymbol{8}$

$t=6$ のとき　共通部分は図(ii)

よって　$S(6)=4 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{2}=\boldsymbol{8}$

(i)


(ii)


(2)　$t \leqq 0,\ 10 \leqq t$ のとき　$S(t)=0$

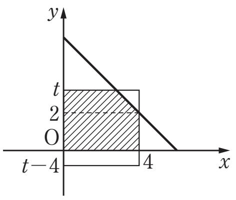
$0<t<2$ のとき　$S(t)$ は単調増加　　$6<t<10$ のとき　$S(t)$ は単調減少

$2\leqq t\leqq 4$ のとき　共通部分は右図斜線部分

$S(t)=$(長方形)$-$(直角二等辺三角形)

$=4\cdot t-\dfrac{1}{2}(t-2)^2$

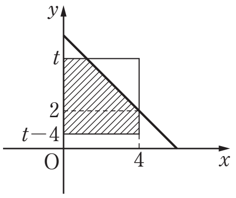
$=-\dfrac{1}{2}t^2+6t-2=-\dfrac{1}{2}(t-6)^2+16$



$4<t\leqq 6$ のとき　共通部分は右図斜線部分

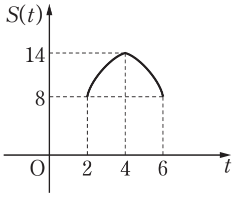
$S(t)=$(正方形)$-$(直角二等辺三角形)

$=16-\dfrac{1}{2}(t-2)^2$



よって $2\leqq t\leqq 6$ における $y=S(t)$ のグラフは右図.

したがって，求める最大値は　$M=S(4)=\mathbf{14}$



(3)　(2)より　$2\leqq t\leqq 5$ において $S(t)=S(t+1)$ となるのは

$-\dfrac{1}{2}(t-6)^2+16=16-\dfrac{1}{2}\{(t+1)-2\}^2$

$(t-6)^2-(t-1)^2=0$　　よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{7}{2}}$

3　実数 x，y について，関係式 $x^2+xy+y^2=3$ が成り立つとする.

(1)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくとき，t を s の式で表せ.

(2)　s のとり得る値の範囲を求めよ.

(3)　$x^2+y^2+x+y=k$ とおくとき，k を s の式で表せ.

(4)　k のとり得る値の最大値 M と最小値 m を求めよ.

---

(1)　$x+y=s$，$xy=t$　……①　とおくとき

$x^2+xy+y^2=3$　より　$(x+y)^2-xy=3$　よって　$s^2-t=3$

ゆえに　$\boldsymbol{t=s^2-3}$　……②

(2)　①より x，y は2次方程式　$X^2-sX+t=0$　の2解

実数条件より　$s^2-4t\geqq 0$

これに②を代入して　$s^2-4(s^2-3)\geqq 0$　　$s^2\leqq 4$　　よって　$\boldsymbol{-2\leqq s\leqq 2}$

(3)　①，②より

$k=x^2+y^2+x+y$

$=(x+y)^2-2xy+x+y$

$=s^2-2t+s$

$=s^2-2(s^2-3)+s=\boldsymbol{-s^2+s+6}$

(4)　$k=-\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$　$(-2\leqq s\leqq 2)$

よって　k の最大値　$M=\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$　$\left(s=\dfrac{1}{2}\right)$　　最小値　$m=\mathbf{0}$　$(s=-2)$

第34講　総合問題(2)

1　$x+y+z=n$（n は正の整数）を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$n=19$ のとき，$(x,\ y,\ z)$ の組は何通りあるか．そのうち，$x,\ y,\ z$ のいずれか2つが等しい組，$x \leqq y \leqq z$ を満たす組はそれぞれ何通りあるか．

(2)　n が6の倍数であるとき，$x \leqq y \leqq z$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は何通りあるか．

(1)　$x+y+z=19$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組の数は，○19個を1列に並べ，その間18か所中2か所に3つに仕切るための棒を1本ずつ入れる総数で，${}_{18}\mathrm{C}_2=$ **153（通り）**

このうち，$x=y$ となるものは　$x=y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$　の9通り．

$y=z,\ z=x$ となるものも同数．

また，$x=y=z$ になることはない．

よって，$x,\ y,\ z$ のいずれか2つが等しい組は　$9\times3=$ **27（通り）**

$x \leqq y \leqq z$ になるときを考える．

$x=y<z$ となるのは　$x=y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$　の6通り

$x<y=z$ となるのは　$y=z=7,\ 8,\ 9$　の3通り

$x,\ y,\ z$ がすべて異なるとき

$x,\ y,\ z$ の大小は $x<y<z,\ x<z<y,\ y<x<z,\ y<z<x,\ z<x<y,\ z<y<x$ の6通りで，これらを満たす $x,\ y,\ z$ の組はすべて同数存在する．

よって　$x<y<z$　となるのは　$(153-27)\times\dfrac{1}{6}=21$（通り）

以上より　$x \leqq y \leqq z$ となるのは　$6+3+21=$ **30（通り）**

(2)　$n=6m$　（m は自然数）とおくと，$x+y+z=6m$ を満たす $(x,\ y,\ z)$ の組は

$${}_{6m-1}\mathrm{C}_2=\frac{(6m-1)(6m-2)}{2}=(6m-1)(3m-1)\text{（通り）}$$

このうち，$x=y$　となるものは　$x=y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3m-1$　の $3m-1$ 通り

$y=z,\ z=x$ も同数ある．

$x=y=z$ となるのは　$x=y=z=2m$ の1通り

よって，$x,\ y,\ z$ の少なくとも2つが等しいのは　$(3m-1)\times3-2=9m-5$（通り）

したがって，$x<y<z$ となるのは

$$\{(6m-1)(3m-1)-(9m-5)\}\cdot\frac{1}{6}=3m^2-3m+1\text{（通り）}$$

また，$x=y<z$ となるのは　$x=y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$　の $2m-1$ 通り

$x<y=z$ となるのは　$y=z=2m+1,\ 2m+2,\ \cdots\cdots,\ 3m-1$　の $m-1$ 通り

以上より，求める総数は　$(3m^2-3m+1)+(2m-1)+(m-1)+1=3m^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{12}n^2}$ **（通り）**

[2]　n を 3 以上の整数とする．1 から $3n$ までの番号が書かれた $3n$ 枚のカードを A さん，B さん，C さんの 3 人に n 枚ずつ配る．
(1)　カードの配り方は何通りあるか．
(2)　A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ で，B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ である配り方は何通りあるか．

(1)　${}_{3n}C_n\times{}_{2n}C_n=\dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}\cdot\dfrac{(2n)!}{n!n!}=\boldsymbol{\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}}$ **（通り）**

(2)　$n\geqq3$ のとき　$(2n-1)-(n+1)=n-2>0$ より　$2n-1>n+1$

B さんのカードの番号の最小値が $2n-1$ であるのは，B さんが $2n-1$ のカードの他に，$2n$ から $3n$ までの $n+1$ 枚のカードから $n-1$ 枚選ぶときで

$${}_{n+1}C_{n-1}=\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}=\frac{1}{2}n(n+1)\ (\text{通り})$$

次に，A さんのカードの番号の最小値が $n+1$ であるのは，A さんが $n+1$ のカードの他に，$n+2$ から $3n$ までの $2n-1$ 枚より B さんの選んだ n 枚を除く残り $n-1$ 枚から $n-1$ 枚選ぶときで，1 通りのみ．

さらに残った n 枚のカードが C さんのカードとなる．

よって求める場合の数は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(n+1)}$ **（通り）**

[3]　区別できない 9 個の球を A，B，C，D の 4 つの箱のいずれかに入れる．A，B，C，D に入れた球の個数をそれぞれ a，b，c，d とし，$X=1000a+100b+10c+d$ とする．X のとり得る値を小さい順に並べたときに 31 番目にくる数を求めよ．また，X が 4 桁の数となる球の入れ方は何通りあるか求めよ．

X が 1 桁になるのは　$a=b=c=0$，$d=9$ のときのみで，1 通り

X が 2 桁になるのは　$a=b=0$，$c+d=9$，$c\geqq1$ のとき

　よって　$(c,\ d)=(1,\ 8)$，$(2,\ 7)$，……，$(9,\ 0)$ の 9 通り

X が 3 桁になるのは　$a=0$，$b+c+d=9$，$b\geqq1$ のとき

　$b=1$ のとき　$c+d=8$ より　$(c,\ d)=(0,\ 8)$，$(1,\ 7)$，……，$(8,\ 0)$ の 9 通り

　$b=2$ のとき　$c+d=7$ より　$(c,\ d)=(0,\ 7)$，$(1,\ 6)$，……，$(7,\ 0)$ の 8 通り

ここまでで，$1+9+9+8=27$（通り）ある．

よって 31 番目は，$b=3$，$c+d=6$　を満たし，小さい方から 4 番目の数である．

　$(c,\ d)=(0,\ 6)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，…… より　31 番目の数は **333**

X が 4 桁になるのは

　$a+b+c+d=9$，$a\geqq1$，$b\geqq0$，$c\geqq0$，$d\geqq0$　を満たす整数 a，b，c，d の組

　つまり　$(a-1)+b+c+d=8$，$a-1\geqq0$，$b\geqq0$，$c\geqq0$，$d\geqq0$　を満たす組である．

それは　○ 8 個とそれを 4 つに仕切る棒 3 本の順列の総数に等しい.

したがって求める場合の数は　$\dfrac{11!}{8!3!}={}_{11}\mathrm{C}_3=\mathbf{165}$ **（通り）**

第35講　総合問題(3)

1　1，2，3，4，5の数字が1つずつ書かれた5枚のカードが横一列に並んでいる．このカードの中から隣り合って置かれている2枚のカードを無作為に選んで入れ替える操作を繰り返す．ただし，最初の状態では数字の小さい順に1，2，3，4，5と並んでいるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　2回の操作を終えた後のカードの並び方は，全部で何通りありうるか求めよ．

(2)　4回の操作の過程で，数字3が書かれたカードが1回も動かされることがない確率を求めよ．

(3)　4回の操作を終えた後，数字3が書かれたカードが左から3番目にある確率を求めよ．

(1)　2回の操作に関わるカードが2枚だけのとき，操作後の並びは12345の1通り．

2回の操作で3枚のカードが関わるとき

カードの選び方が123，234，345の3通り

123は操作後に231または312の2通りの並びとなる．他も2通り．

よって $3\cdot2=6$（通り）

2回の操作で4枚のカードが関わるとき

操作後の並びは21435，21354，13254の3通り

以上より　全部で　**10通り**

(2)　題意を満たすのは　4回とも1と2，4と5の入れ替えとなるとき．

1回の操作での入れ替えは　1と2，2と3，3と4，4と5の4通り．

よって　1と2，4と5　を入れ替える確率はともに $\dfrac{1}{4}$

したがって　求める確率は $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

(3)　1回の移動において

3が1つ左，1つ右に移動する確率はともに $\dfrac{1}{4}$

（ただし，それぞれ左端，右端にいるときは確率0）

3が移動しない確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$　（ただし，両端にいるときは確率 $\dfrac{3}{4}$）

4回の移動で右と左に1つずつ移動するときの確率は　$\dfrac{4!}{2!}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{16}$

右2つ，左2つ移動するときの確率は　$\dfrac{4!}{2!2!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{3}{128}$

これと(2)のときを合わせて　$\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{128}+\dfrac{1}{16}=\boldsymbol{\dfrac{35}{128}}$

2　2個のサイコロを投げて，xy 平面上の点Pを移動させる次の試行を考える．

試行：2個のサイコロを同時に投げて，大きい目の数を X，小さい目の数を Y とする．ただし，同じ目が出た場合は，X，Y の両者をその目の数とする．このとき

X が3以上なら，点Pを x 軸の正の方向に1動かし，

Y が3以上なら，点Pをさらに y 軸の正の方向に1動かす．

この試行を繰り返して点Pを原点 $(0,\ 0)$ から順に動かしていくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　1回目の試行終了後に点Pが $(1,\ 0)$ に移動している確率を求めよ．

(2)　2回目の試行終了後に点Pが $(1,\ 1)$ に移動している確率を求めよ．

(3)　n 回目の試行終了後に点Pが $(n,\ n-1)$ に移動している確率を求めよ．ただし，n は自然数である．

(1)「大きい目 X が3以上　かつ　小さい目 Y が2以下」の余事象は

「X が2以下　または　Y が3以上」である．

X が2以下となるのは，2個とも2以下の目が出るときであり，

Y が3以上となるのは，2個とも3以上の目が出るときである．これらは排反．

よって x 軸の正の方向に1移動し，y 軸方向には移動しない確率は

$$1-\left(\frac{2^2}{6^2}+\frac{4^2}{6^2}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{9}}\quad\cdots\cdots①$$

これが題意の確率である．

(2)　Y が3以上（このとき X も3以上）となるのは，2個とも3以上の目が出るときである．

よって x，y 軸の正の方向にともに1つずつ移動する確率は　$\dfrac{4^2}{6^2}=\dfrac{4}{9}$　……②

①，②より，点Pが移動しない確率は　$1-\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{1}{9}$

ゆえに　題意の確率は　$2!\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{8}{81}}$

(3)　x 軸の正の方向にのみ1つ移動し，x，y の正の方向にともに1つずつ $n-1$ 回移動するときで，その確率は　${}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{4}{9}\right)^1\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}=\boldsymbol{n\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}$

3　n を自然数とする．1つの袋に白球が n 個と赤球が2個，合わせて $n+2$ 個の球が入っている．この袋から，$n+1$ 個の球を1個ずつ取り出し，左から1列に順に並べる．

(1)　並べた列に赤球が2個入っている確率を，n を用いて表せ．

(2)　2個の赤球の間にある白球の個数を k とする．ただし，並べた列に赤球が2個入っていない場合は，$k=0$ とする．このとき，k の期待値が1以上となる最小の n の値を求めよ．

(1)　$n+2$ 個の球から $n+1$ 個を選ぶ方法は　${}_{n+2}\mathrm{C}_{n+1}={}_{n+2}\mathrm{C}_1=n+2$（通り）

このうち，赤球を2個選ぶ方法は　${}_2\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_{n-1}=n$（通り）

よって求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{n}{n+2}}$

(2)　赤球が選ばれる回に注目する.「$n+2$ 回目」を「選ばれない」のと同じとすると，赤球が選ばれる回の選び方は　${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$（通り）

$k=0$ となるのは

(i)　赤球が1つのみ選ばれるとき　　(ii)　赤球が連続して選ばれるとき

(i)のとき　$n+1$ 回中1回選ぶ選び方で　$n+1$ 通り

(ii)のとき　最初の赤球が出る回の選び方で　1回目から n 回目までの n 通り

よって　$2n+1$ 通り

$k=1$ となるのは，赤白赤　と連続して出ているとき

最初の赤球が出る回の選び方で　1回目から $n-1$ 回目の　$n-1$ 通り

$k=2$ となるのは，赤白白赤　と連続して出ているとき

最初の赤球が出る回の選び方で　1回目から $n-2$ 回目の　$n-2$ 通り

同様にして，$1\leqq k\leqq n-1$ のとき　k となるのは　$n-k$ 通りある.

したがって k の期待値は

$$0\times\frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+1)}+\sum_{k=1}^{n-1}k\times\frac{2(n-k)}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{(n+2)(n+1)}\times\sum_{k=1}^{n-1}(-k^2+nk)$$

$$=\frac{2}{(n+2)(n+1)}\times\left\{-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+n\times\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$$

$$=\frac{n(n-1)}{3(n+2)(n+1)}\{3n-(2n-1)\}=\frac{n(n-1)}{3(n+2)}$$

よって　$\dfrac{n(n-1)}{3(n+2)}\geqq 1$ より　$n^2-n\geqq 3n+6$　　$n^2-4n-6\geqq 0$

$n\leqq 2-\sqrt{10}$，$2+\sqrt{10}\leqq n$

したがって　求める n の最小値は　$\boldsymbol{n=6}$

第36講　総合問題(4)

1 xy 平面上で不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{2} \leqq \sin(x+y) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を領域 D とする．

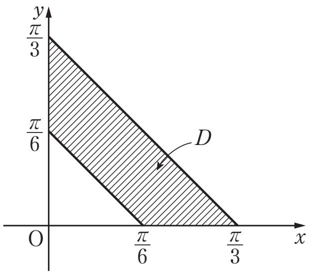
(1) 領域 D の面積を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D の中を動くとき，

$3\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+y\right)+\cos^2\left(\dfrac{x}{2}+y\right)+\sqrt{3}\sin(x+2y)+2$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{2} \leqq \sin(x+y) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$0 \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{3}$

これと $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より，領域 D は右図斜線部分（境界含む）．



よって求める D の面積は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{\pi^2}{24}}$

(2) $\dfrac{x}{2}+y=\theta$ とおき，$y=-\dfrac{x}{2}+\theta$　（傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線）が領域 D と共有点をもつときの y 切片 θ のとり得る値の範囲を求めると

$\left(0,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ を通るとき　θ は最大値 $\dfrac{\pi}{3}$　　$\left(\dfrac{\pi}{6},\ 0\right)$ を通るとき　θ は最小値 $\dfrac{\pi}{12}$ をとる

よって　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$

このとき

$$3\sin^2\left(\frac{x}{2}+y\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}+y\right)+\sqrt{3}\sin(x+2y)+2$$
$$=3\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sqrt{2}\sin 2\theta+2$$
$$=3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin 2\theta+2$$
$$=\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+4$$
$$=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+4$$

$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より　$0 \leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\pi}{2}$

よって　最大値 **6** $\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\ \text{つまり}\ x=0,\ y=\dfrac{\pi}{3}\right)$　最小値 **4** $\left(\theta=\dfrac{\pi}{12}\ \text{つまり}\ x=\dfrac{\pi}{6},\ y=0\right)$

2 [1]　$a>1$ のとき，x についての不等式 $2a^{3x+1}-a^{2x+2}-2a^{2x}+a^{x+1} \leqq 0$ を解け．

$a^x=X$ とおくと

$$2a^{3x+1}-a^{2x+2}-2a^{2x}+a^{x+1}$$
$$=2aX^3-a^2X^2-2X^2+aX$$

$=2aX^3-(a^2+2)X^2+aX$

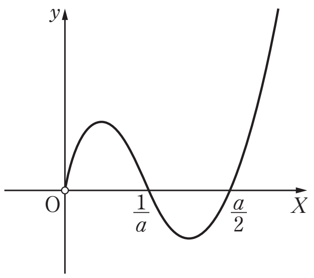
$=X\{2aX^2-(a^2+2)X+a\}=X(2X-a)(aX-1)$

これを $f(X)$ とすると，$f(X)=0$ となるのは　$X=0,\ \dfrac{a}{2},\ \dfrac{1}{a}$　$(a>1)$

$\dfrac{a}{2}\geqq\dfrac{1}{a}$ より　$a^2\geqq 2$　　$a\geqq\sqrt{2}$

よって　$a\geqq\sqrt{2}$ のとき　$y=f(X)$ のグラフは右図

$\left(\dfrac{1}{a}=\dfrac{a}{2}\right.$ となることもある$\left.\right)$.

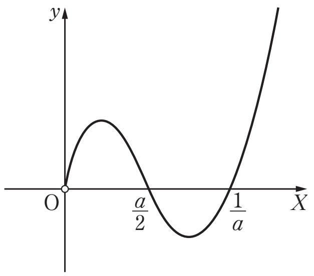


よって　$f(X)\leqq 0$ の解は　$\dfrac{1}{a}\leqq X\leqq\dfrac{a}{2}$

つまり　$a^{-1}\leqq a^x\leqq 2^{-1}\cdot a$

$a>1$ より　$-1\leqq x\leqq\log_a(2^{-1}\cdot a)=1-\log_a 2$

$a<\sqrt{2}$ のとき　$y=f(X)$ のグラフは右図.



よって　$f(X)\leqq 0$ の解は　$\dfrac{a}{2}\leqq X\leqq\dfrac{1}{a}$

つまり　$1-\log_a 2\leqq x\leqq -1$

以上より　$\boldsymbol{a\geqq\sqrt{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 1-\log_a 2}$

$\boldsymbol{a<\sqrt{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{1-\log_a 2\leqq x\leqq -1}$

2 ［2］　$a>0,\ a\neq 1$ のとき　$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq 2x+1$ を満たす x の値の範囲を求めよ.

$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq 2x+1$　……①　より　$\log_a\{1-(a-1)a^x\}\leqq\log_a a^{2x+1}$

$a>1$ のとき　$1-(a-1)a^x\leqq a^{2x+1}$

$a(a^x)^2+(a-1)a^x-1\geqq 0$

$(a^x+1)(a\cdot a^x-1)\geqq 0$

$a^x>0$ より　$a\cdot a^x-1\geqq 0$　　$a^x\geqq\dfrac{1}{a}$　　$a^x\geqq a^{-1}$

$a>1$ より　$x\geqq -1$

また①の真数条件より　$1-(a-1)a^x>0$　　$(a-1)a^x<1$

$a>1$ より　$a^x<\dfrac{1}{a-1}$　　よって　$x<\log_a\dfrac{1}{a-1}$

ここで　$-1=\log_a\dfrac{1}{a}<\log_a\dfrac{1}{a-1}$　　$-1\leqq x<\log_a\dfrac{1}{a-1}$

$0<a<1$ のとき　$1-(a-1)a^x\geqq a^{2x+1}$　　$(a^x+1)(a\cdot a^x-1)\leqq 0$

$a^x>0$ より　$a^x\leqq\dfrac{1}{a}$　　$a^x\leqq a^{-1}$

$0<a<1$ より　$x\geqq -1$

また①の真数条件より　$(a-1)a^x<1$

$0<a<1$，$a^x>0$ より　(左辺)<0　よって　すべての実数 x で成り立つ.

よって　$x \geqq -1$

以上より　**$0<a<1$ のとき　$x \geqq -1$**

$a>1$ のとき　$-1 \leqq x < \log_a \dfrac{1}{a-1}$

3　x の方程式　$|\log_{10}x| = px+q$　……①（p，q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする.

（i）3 つの解の比は $1:2:3$ である.

（ii）3 つの解のうち最小のものは $\dfrac{1}{2}$ より大きく 1 より小さい.

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ.

(i)より①の異なる 3 つの正の解を α，2α，3α　とすると

(ii)より　$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$

$$\begin{cases} -\log_{10}\alpha = p\alpha + q & \cdots\cdots② \\ \log_{10}2\alpha = 2p\alpha + q & \cdots\cdots③ \\ \log_{10}3\alpha = 3p\alpha + q & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

③より　$\log_{10}2+\log_{10}\alpha = 2p\alpha+q$　……⑤　　④より　$\log_{10}3+\log_{10}\alpha = 3p\alpha+q$　……⑥

②＋⑤より　$3p\alpha+2q=A$

②＋⑥より　$4p\alpha+2q=B$　　これらより　$p=\dfrac{-A+B}{\alpha}$，$q=\dfrac{4A-3B}{2}$

このとき②より　$-\log_{10}\alpha = \dfrac{-A+B}{\alpha}\cdot\alpha + \dfrac{4A-3B}{2}$

$$= A - \frac{1}{2}B$$

$$= \log_{10}2 - \frac{1}{2}\log_{10}3$$

$\log_{10}\alpha = -\log_{10}2 + \dfrac{1}{2}\log_{10}3 = \log_{10}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

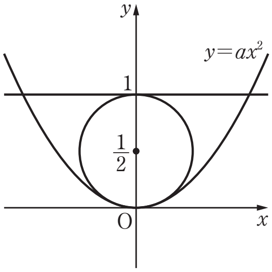
したがって　**$p=\dfrac{2(-A+B)}{\sqrt{3}}$　　$q=\dfrac{4A-3B}{2}$**

第 37 講　総合問題(5)

1　a を正の定数とし，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=1$ で囲まれる領域を D とする．y 軸上の点を中心とし，領域 D に含まれる円の半径の最大値を求めよ．

円の半径を r とすると，(円の直径)$\leqq 1$　より　$2r \leqq 1$　　よって　　$r \leqq \dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$ のとき　円の中心の座標は　$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$



$y=ax^2$　つまり　$x^2=\dfrac{y}{a}$　　これと　$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$　より

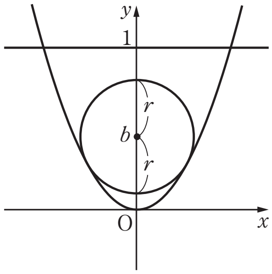
$\dfrac{y}{a}+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$ay^2+(1-a)y=0$　　$y\{ay+(1-a)\}=0$　　$y=0,\ \dfrac{a-1}{a}$

交点が O のみより　$\dfrac{a-1}{a} \leqq 0$　　よって　$0<a \leqq 1$

したがって　$0<a \leqq 1$　のとき　r の最大値は　$\dfrac{1}{2}$　である．

$a>1$ のとき　円の中心の座標を $(0,\ b)$ とすると，



$y=ax^2$　と　$x^2+(y-b)^2=r^2$　より

$ay^2+(1-2ab)y+a(b^2-r^2)=0$

これが重解をもつとき，放物線と円は接する．

$(1-2ab)^2-4a^2(b^2-r^2)=0$　　$4a^2r^2-4ab+1=0$

よって　$b=\dfrac{4a^2r^2+1}{4a}$

またグラフより　$b+r \leqq 1$　つまり　$\dfrac{4a^2r^2+1}{4a}+r \leqq 1$

$4a^2r^2+4ar+1-4a \leqq 0$　　よって　$r \leqq \dfrac{-1+2\sqrt{a}}{2a}$

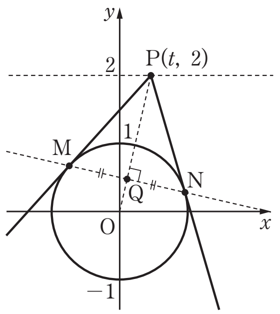
以上より　求める半径の最大値は　**$0<a \leqq 1$　のとき　$\dfrac{1}{2}$　　$a>1$　のとき　$\dfrac{-1+2\sqrt{a}}{2a}$**

2　原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする．

(1)　直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C の 2 本の接線を引き，その接点を M, N とする．直線 OP と弦 MN の交点を Q とする．点 Q の座標を t を用いて表せ．ただし，t は実数とする．

(2)　点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(1)　直線 OP の方程式は　$2x-ty=0$　……①



$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$　とおく．

M，N における円 C の接線の方程式はそれぞれ

$x_1x+y_1y=1$，　$x_2x+y_2y=1$

これらがともに　$P(t,\ 2)$ を通るので

$tx_1+2y_1=1$，　$tx_2+2y_2=1$

これらは，直線　$tx+2y=1$ が M，N を通ることを示す．

したがって直線 MN の方程式は　$tx+2y=1$　……②

①，②より　$x=\dfrac{t}{t^2+4}$，$y=\dfrac{2}{t^2+4}$　よって　**Q** $\left(\boldsymbol{\dfrac{t}{t^2+4}},\ \boldsymbol{\dfrac{2}{t^2+4}}\right)$

(2)　$Q(X,\ Y)$ とおくと，$X=\dfrac{t}{t^2+4}$　……③　　$Y=\dfrac{2}{t^2+4}$　……④

③，④より　$\dfrac{X}{t}=\dfrac{Y}{2}$　よって　$t=\dfrac{2X}{Y}$

これを④に代入して　$Y=\dfrac{2}{\dfrac{4X^2}{Y^2}+4}=\dfrac{Y^2}{2X^2+2Y^2}$

$2X^2Y+2Y^3=Y^2$　　$X^2+Y^2-\dfrac{1}{2}Y=0$　　$X^2+\left(Y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$

$Y=0$ のとき　$X^2=0$　　$X=0$　　よって　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

したがって　求める軌跡は　**円** $\boldsymbol{x^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}}$　**（ただし点 (0，0) は除く）**

> **3**　[1]　k を正の実数とし，点 $(3k,\ 4k)$ を中心とする半径 $5k+1$ の円を C_k とする．k がすべての正の実数値をとって変化するとき，円 C_k の動く範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

C_k：$(x-3k)^2+(y-4k)^2=(5k+1)^2$　　これを k について整理すると

$(6x+8y+10)k+(-x^2-y^2+1)=0$　……①

$6x+8y+10=0$ のとき　$-x^2-y^2+1=0$　これらより　$x=-\dfrac{3}{5}$，$y=-\dfrac{4}{5}$

よって①は k の値に関わらず　$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$ を通る．

$6x+8y+10>0$ のとき　$k>0$ より

①を満たす $(x,\ y)$ の描く領域は　$-x^2-y^2+1<0$　　つまり　$x^2+y^2>1$

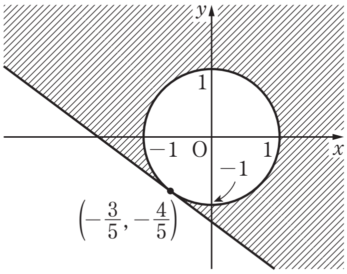
$6x+8y+10<0$ のとき　$k>0$ より

①を満たす $(x,\ y)$ の描く領域は　$-x^2-y^2+1>0$　　つまり　$x^2+y^2<1$

以上より，求める範囲は右図斜線部.

境界は $\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$ を含み，

他は含まない.



3 ［2］　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の　$|x|\geqq 1$　を満たす部分を C とする.

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ.

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，図示せよ.

(1)　求める直線は OA の中点 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，直線 OA $\left(傾き\ \dfrac{1}{t}\right)$ に垂直な直線である.

よって　$y=-t\left(x-\dfrac{t}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$　より　$\boldsymbol{y=-tx+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}}$　……①

(2)　①より $t^2-2xt-2y+1=0$　……②

②の左辺を $f(t)$ とおくと，$y=f(t)$ のグラフの軸は　$t=x$

②が $|t|\geqq 1$ に少なくとも 1 解をもつのは

「$f(-1)\leqq 0$」または「$f(1)\leqq 0$」または「$f(-1)>0$，$f(1)>0$，$|x|>1$，判別式 $D\geqq 0$」

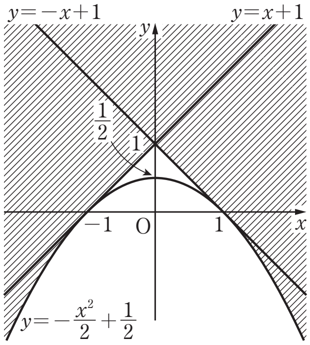
つまり「$y\geqq x+1$」

または「$y\geqq -x+1$」

または「$y<x+1$，$y<-x+1$，$|x|>1$，$y\geqq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$」

のときである.

よって求める範囲は，右図斜線部分．境界含む.



第38講　総合問題(6)

1 (1) 方程式 $2x^3-3x^2+1=a$ (a は実数) が相異なる3つの実数解 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとき，α, β, γ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

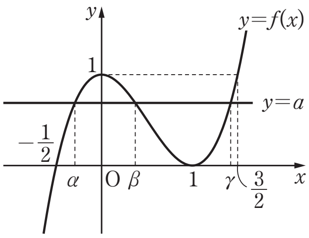
(2) (1)のとき，$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ．また，l の動く範囲を求めよ．

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$ とおくと，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

極大値 $f(0)=1$ 　極小値 $f(1)=0$

また $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$ であり，$f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ より

$y=f(x)$ のグラフは右図．



これと直線 $y=a$ が3交点をもつとき，

その x 座標が α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$

したがって求める範囲は　$\boldsymbol{-\frac{1}{2}<\alpha<0,\ 0<\beta<1,\ 1<\gamma<\frac{3}{2}}$

(2) $f(x)=a$ つまり $2x^3-3x^2+1-a=0$ の3つの実数解が α, β, γ より

解と係数の関係から　$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}$　　よって　$\gamma+\alpha=\frac{3}{2}-\beta$ ……①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$　よって　$\gamma\alpha=-\alpha\beta-\beta\gamma$

①より　$\gamma\alpha=-\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=\beta^2-\frac{3}{2}\beta$ ……②

①，②より　$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\gamma+\alpha)^2-4\gamma\alpha$

$$=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2-4\left(\beta^2-\frac{3}{2}\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}=\frac{-12\beta^2+12\beta+9}{4}$$

したがって　$\boldsymbol{l=\frac{\sqrt{-12\beta^2+12\beta+9}}{2}}$

$g(\beta)=-12\beta^2+12\beta+9=-12\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+12$ とおくと

(1)より　$0<\beta<1$　　よって　$9<g(\beta)\leqq 12$　　ゆえに　$\boldsymbol{\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}}$

2 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える．曲線 $C:y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $t\geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を2本もつことを示せ．

(2) (1)において，傾きが t である2本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし　$p<q$）．このとき，点Pと点Qは点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ．

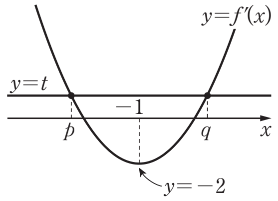
(3) $t\geqq 0$ のとき，2点P，Qの間の距離の最小値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3+3x^2+x-1$　より　$f'(x)=3x^2+6x+1=3(x+1)^2-2$

$t \geqq 0$　のとき $f'(x)=t$　を満たす異なる2実数解があることが

$y=f'(x)$ と $y=t$ のグラフよりわかる.

したがって　C は傾きが t である接線を2本もつ.



(2)　p, q は $f'(x)=t$　つまり　$3x^2+6x+1-t=0$　の2解より

$p+q=-2$　　よって　$\dfrac{p+q}{2}=-1$

また $f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$　より

$$f(p)+f(q)=f'(p)\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}p-\frac{4}{3}+f'(q)\left(\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}q-\frac{4}{3}$$

ここで $f'(p)=f'(q)=t$ より

$$f(p)+f(q)=t\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}p-\frac{4}{3}+t\left(\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}q-\frac{4}{3}$$

$$=t\left\{\frac{1}{3}(p+q)+\frac{2}{3}\right\}-\frac{4}{3}(p+q)-\frac{8}{3}$$

$p+q=-2$ より

$f(p)+f(q)=t\left\{\dfrac{1}{3}\cdot(-2)+\dfrac{2}{3}\right\}-\dfrac{4}{3}\cdot(-2)-\dfrac{8}{3}=0$　　よって　$\dfrac{f(p)+f(q)}{2}=0$

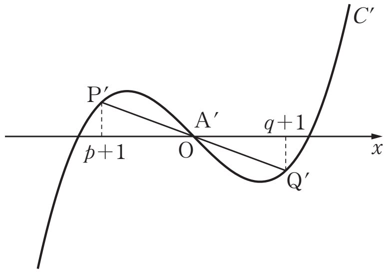
したがって　P, Qの中点がA$(-1,\ 0)$ より，2点P, QはAに関して対称である.

(3)　(2)より PQ=2AQ　よって AQの距離の最小値を求める.

C を x 軸方向に1平行移動したグラフの式は

C' : $y=(x-1)^3+3(x-1)^2+(x-1)-1=x^3-2x$

右図より



$\mathrm{AQ}^2=(\mathrm{A'Q'})^2=(q+1)^2+\{(q+1)^3-2(q+1)\}^2$

$=(q+1)^6-4(q+1)^4+5(q+1)^2$

$(q+1)^2=X$　とおくと $\mathrm{AQ}^2=X^3-4X^2+5X$

$g(X)=X^3-4X^2+5X$ とおくと

$g'(X)=3X^2-8X+5=(3X-5)(X-1)$

また(1)より　$f'(x)=0$　を満たす x について　$(x+1)^2=\dfrac{2}{3}$

よって　$t \geqq 0$　のとき $X=(q+1)^2 \geqq \dfrac{2}{3}$

したがって　PQの最小値は　$2\sqrt{\dfrac{50}{27}}=\mathbf{\dfrac{10\sqrt{6}}{9}}$

X	$\frac{2}{3}$	…	1	…	$\frac{5}{3}$	…
$g'(X)$		+	0	−	0	+
$g(X)$	$\frac{50}{27}$	↗		↘	$\frac{50}{27}$	↗

3　$f(x)=2x^3+12x^2+18x+9$ とおくとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A に関して点対称である．点 A を通る傾き m の直線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 A の座標を求めよ．

(2)　直線 l が関数 $y=f(x)$ のグラフと 3 点で交わる条件を求めよ．

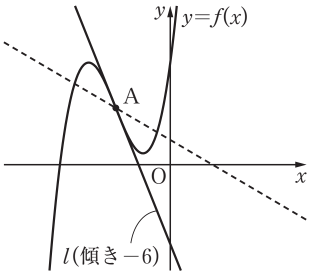
(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積の和が 1 となるような m の値を求めよ．

(1)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -5 平行移動したグラフの式を $y=g(x)$ とすると

$$g(x)=f(x-2)-5=2(x-2)^3+12(x-2)^2+18(x-2)+9-5=2x^3-6x$$

これは奇関数よりグラフは原点対称．

よって　$y=f(x)$ のグラフは　**A$(-2,\ 5)$** に関して点対称である．



(2)　$f'(x)=6x^2+24x+18$　$f'(-2)=-6$

よって　$y=f(x)$ のグラフの対称点 A を通る直線 l が $y=f(x)$ のグラフと 3 点で交わるのは　$\boldsymbol{m>-6}$　のとき

(3)　題意の面積は　$y=g(x)$ のグラフと原点を通る傾き m の直線　$y=mx$　で囲まれた部分の面積である．

$g(x)=mx$　つまり　$2x^3-(m+6)x=0$

$$x\{2x^2-(m+6)\}=0 \qquad x=0,\ \pm\sqrt{\frac{m+6}{2}} \quad (m>-6)$$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{m+6}{2}}$　とおくと，交点の x 座標は　$x=-\alpha,\ 0,\ \alpha$

グラフの対称性より

$$\int_0^{\alpha}\{mx-(2x^3-6x)\}dx=\frac{1}{2} \qquad \left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}(m+6)x^2\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{2}$$

$(m+6)\alpha^2-\alpha^4=1$　　つまり　$\dfrac{(m+6)^2}{2}-\dfrac{(m+6)^2}{4}=1$　　$(m+6)^2=4$

$m+6=2$　(>0)　　ゆえに　$\boldsymbol{m=-4}$

第 39 講　総合問題(7)

1　平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C　を考える．これら 4 点のうち 3 点 A，B，C は同一直線上にあり，　$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　かつ　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}$

であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

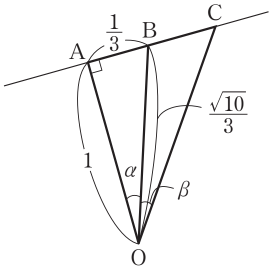
(1)　$|\overrightarrow{BC}|$，$|\overrightarrow{OC}|$ を求めよ．

(2)　三角形 OBC の面積 S を求めよ．

(1)　(i)　A，B，C の順に並ぶとき

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\overrightarrow{OA}|^2=1$

また，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1+\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$



$\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$　より　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OC}|$

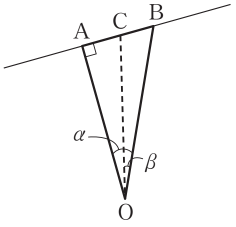
つまり　$|\overrightarrow{OB}|\cos\angle BOC=1$　　よって　$\cos\angle BOC=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$　とすると　$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

したがって　$AC=OA\cdot\tan(\alpha+\beta)=1\cdot\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに　$|\overrightarrow{BC}|=AC-AB=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$　　$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

(ii)　A，C，B の順に並ぶとき



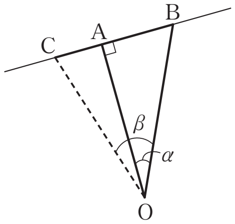
(i)と同様の手順で $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$　となるが，

このとき A と C が一致し不適．

(iii)　C，A，B の順に並ぶとき

(i)と同様の手順で　$\tan\alpha=\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ より

A と C が一致し不適．



(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot OA=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{12}\cdot 1=\mathbf{\dfrac{5}{24}}$

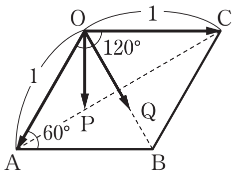
2　平行四辺形 OABC において，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，かつ $\angle AOC=120^\circ$ であるとする．また s，t を実数とし，2 点 P，Q をそれぞれ　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OB}$　と定める．

(1)　内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$　を t を用いて表せ．

(2)　内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}$ が 0 のとき，内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ を s を用いて表せ．

(3)　(2)の条件のもとで，さらに点 Q が線分 OB 上にあるような s の値の範囲を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$　より



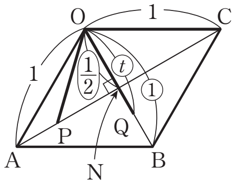
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\{s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}\}\cdot t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

$=t\{s|\overrightarrow{OA}|^2+s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)|\overrightarrow{OC}|^2\}$

$=t\left\{s-\dfrac{1}{2}s+(1-s)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(1-s)\right\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}t}$

(別解)　四角形 OABC はひし形より 2 本の対角線は互いに他を二等分する.

OB と AC の交点を N とすると，$|\overrightarrow{ON}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|$

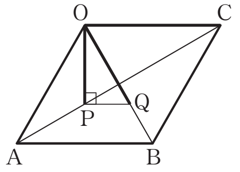


よって　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\angle POB$

$=|\overrightarrow{ON}|\cdot t|\overrightarrow{OB}|=\dfrac{1}{2}t|\overrightarrow{OB}|^2$

ここで　△OAB は正三角形より　$|\overrightarrow{OB}|=1$　　ゆえに　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}t$

(2)　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$　より $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=0$



ゆえに $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|^2=|s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}|^2$

$=s^2|\overrightarrow{OA}|^2+2s(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)^2|\overrightarrow{OC}|^2$

$=s^2-s(1-s)+(1-s)^2=\boldsymbol{3s^2-3s+1}$

(3)　(1)(2)より　$\dfrac{1}{2}t=3s^2-3s+1$　　$t=6s^2-6s+2$

ここで　Q が線分 OB 上にあるとき　$0\leqq t\leqq1$　より $0\leqq6s^2-6s+2\leqq1$

$6s^2-6s+2=6\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geqq0$　より求める条件は　$6s^2-6s+2\leqq1$

$6s^2-6s+1\leqq0$　　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\leqq s\leqq\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}$

3　すべての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える．この四面体について

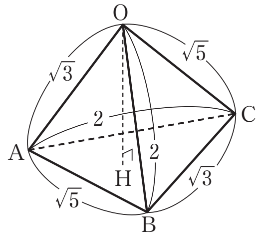
$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=\sqrt{5}$

とする.

(1)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ をそれぞれ求めよ.

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ.

すべての面が合同より　$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=2$



(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{3+4-5}{2}=\boldsymbol{1}$　　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{4+5-3}{2}=\boldsymbol{3}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{5+3-4}{2}=\boldsymbol{2}$

(2)　$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，$\alpha+\beta+\gamma=1$　……①とおく.

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2)\alpha+(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma=0$

よって　$-2\alpha+3\beta+\gamma=0$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-|\overrightarrow{OA}|^2)\alpha+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(|\overrightarrow{OC}|^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma=0$

よって　$-\alpha+2\beta+3\gamma=0$　……③

①，②，③より　$\alpha=\frac{7}{11}$，$\beta=\frac{5}{11}$，$\gamma=-\frac{1}{11}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{11}(7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

ここで　$|7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|^2=49\cdot3+25\cdot4+5+70\cdot1-10\cdot3-14\cdot2=264$　より

$|\overrightarrow{OH}|=\frac{1}{11}\sqrt{264}=\frac{2\sqrt{66}}{11}$

また　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

したがって　四面体OABCの体積は $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{66}}{11}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

第 40 講　総合問題(8)

1 ［1］　12 は $12=3+4+5$ と連続する 3 つの自然数の和として表すことができる．88 を連続する 2 つ以上の自然数の和として表せ．

連続する n 個の自然数（$n\geqq 2$）を　$m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots\cdots,\ m+n-1$　とする　（$m\geqq 1$）

これらの和は　$\dfrac{1}{2}n\{m+(m+n-1)\}=\dfrac{1}{2}n(2m+n-1)$　　これが 88 になるとき

$$n(2m+n-1)=176=2^4\times 11$$

$n,\ 2m+n-1$ は自然数．　また　$(2m+n-1)-n=2m-1>0$　より $n<2m+n-1$

$2m+n-1$ と n の差が奇数であることから，$n,\ 2m+n-1$ は偶奇を異にする．

よって　$(n,\ 2m+n-1)=(11,\ 2^4)$　のみ

したがって　$n=11,\ m=3$　　　ゆえに　**88＝3＋4＋5＋……＋13（11 個の和）**

1 ［2］　自然数 1，2，3，……，n から異なる 2 つを選ぶすべての組合せについて，2 数の差の 2 乗をたし合わせたものを S_n とする．例えば $S_3=(1-2)^2+(1-3)^2+(2-3)^2=6$　である． 次の問いに答えよ． (1)　$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$　を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$　を n で表せ． (2)　S_n を求めよ．

(1)　$(x-1)^4-x^4=-4x^3+6x^2-4x+1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^4-k^4\}=-4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

(左辺)$=(0^4-1^4)+(1^4-2^4)+(2^4-3^4)+\cdots\cdots+\{(n-1)^4-n^4\}=-n^4$　より

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=n^4+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^4+2n^3+n^2=n^2(n+1)^2$$

したがって　$\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$　$\left(=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\right)$

(2)　$1\sim n$　から選んだ 2 数の差が k となる組合せは

$(1,\ 1+k),\ (2,\ 2+k),\ \cdots\cdots,\ (n-k,\ n)$　の $n-k$ 個

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\times(n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}(-k^3+nk^2)=-\frac{1}{4}(n-1)^2n^2+n\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$$=\frac{1}{12}(n-1)n^2\{-3(n-1)+2(2n-1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{12}(n-1)n^2(n+1)}$$

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

という関係を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　n は2以上の自然数とする．このとき，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n，b_n，b_{n-1} を用いて表せ．

(2)　$\{b_n\}$ が初項 $b_1=p$，公差 q の等差数列であるとき，a_n を n，p，q を用いて表せ．

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n=a_n+2a_{n-1}+3a_{n-2}+\cdots\cdots+na_1 \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}=a_{n-1}+2a_{n-2}+\cdots\cdots+(n-1)a_1 \quad \cdots\cdots②$$

①－②より

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots\cdots+a_1=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

したがって　$n\geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}b_n-\frac{(n-1)n}{2}b_{n-1}}$

(2)　$b_n=p+(n-1)q$　より

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}\{p+(n-1)q\}-\frac{(n-1)n}{2}\{p+(n-2)q\}$$

$$=\frac{3}{2}qn^2+\left(p-\frac{3}{2}q\right)n \quad (n\geqq 2) \quad \cdots\cdots③$$

①で $n=1$ のとき　$b_1=a_1$　　よって　$a_1=p$

③で $n=1$ とすると　$a_1=\frac{3}{2}q+p-\frac{3}{2}q=p$　　よって　③は $n=1$ のときも成立する．

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\left\{\frac{3}{2}qn^2+\left(p-\frac{3}{2}q\right)n\right\}-\left\{\frac{3}{2}q(n-1)^2+\left(p-\frac{3}{2}q\right)(n-1)\right\}$$

$=p+3q(n-1)$　　これは $n=1$ のときも成立する．

したがって　$\boldsymbol{a_n=p+3q(n-1)}$

3 関係式　$a_1=0,\ \dfrac{1}{1-a_{n+1}}-\dfrac{1}{1-a_n}=2n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

により定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$　に対して　$b_k=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}(1-\sqrt{a_{k+1}})$

とおく．このとき，すべての n に対して　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k<\sqrt{2}-1$　が成り立つことを示せ．

(1)　$\dfrac{1}{1-a_n}=c_n$　とおくと　$c_1=\dfrac{1}{1-a_1}=1$

$c_{n+1}-c_n=2n+1,\ c_1=1$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=n^2\quad(n=1 \text{ のときも成立})$$

よって　$c_n=n^2$　　つまり　$\dfrac{1}{1-a_n}=n^2$　より　$\boldsymbol{a_n=1-\dfrac{1}{n^2}}$

(2)　$b_k=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}\left\{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{(k+1)^2}}\right\}=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}\left\{1-\dfrac{\sqrt{k(k+2)}}{k+1}\right\}$

$=\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}-\sqrt{\dfrac{k+2}{k+1}}$　より

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)$

$=\sqrt{2}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}$

n は自然数より　$\dfrac{1}{n+1}>0$　つまり $\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}>\sqrt{1}=1$

よって　$\sqrt{2}-\sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}<\sqrt{2}-1$

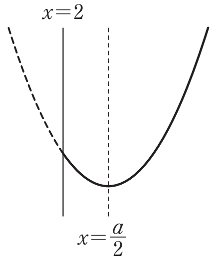
したがってすべての自然数 n で　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k<\sqrt{2}-1$

第41講　総合問題(9)

1　a を定数とする．関数　$f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$　の最小値を a を用いて表せ．

(i)　$x\geqq 2$　のとき　$f(x)=x^2-a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+2a$

この範囲における最小値は



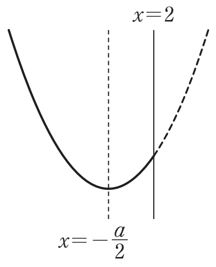
$2\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$a\geqq 4$ のとき　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$

$\dfrac{a}{2}\leqq 2$　つまり　$a\leqq 4$ のとき　$f(2)=\dfrac{a^2}{4}+4$

よって　$x\geqq 2$ における最小値 m_1 は　$m_1=\begin{cases}2a & (a\geqq 4)\\ \dfrac{a^2}{4}+4 & (a\leqq 4)\end{cases}$

(ii)　$x\leqq 2$　のとき　$f(x)=x^2+a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-2a$

この範囲における最小値は



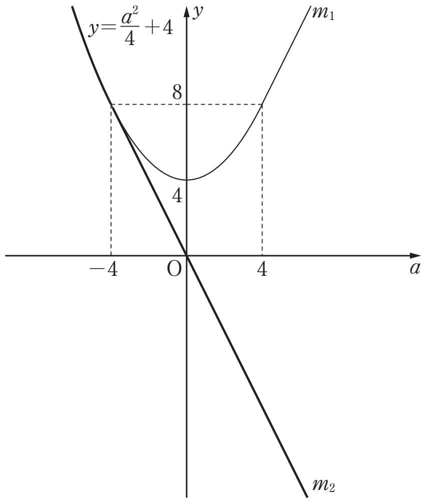
$-\dfrac{a}{2}\leqq 2$　つまり　$a\geqq -4$ のとき　$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$

$2\leqq -\dfrac{a}{2}$　つまり　$a\leqq -4$ のとき　$f(2)=\dfrac{a^2}{4}+4$

よって　$x\leqq 2$ における最小値 m_2 は　$m_2=\begin{cases}-2a & (a\geqq -4)\\ \dfrac{a^2}{4}+4 & (a\leqq -4)\end{cases}$

m_1，m_2 のうち，大きくない方が求める最小値である．

したがって，m_1 と m_2 のグラフ（右図）のうち，
上になってない方が最小値をとるグラフである．
ゆえに求める最小値は



$a\leqq -4$　のとき　$\dfrac{a^2}{4}+4$

$-4\leqq a$　のとき　$-2a$

2 (1) 実数 x, y について，$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$ の最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ．

(2) a を負の実数とする．$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$ を満たす x, y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x, y の値を求めよ．

(1) $f(x,\ y)=4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$ とおくと

$$f(x,\ y)=4x^2-4(3y-1)x+12y^2-18y+7$$

$$=4\left\{x-\frac{1}{2}(3y-1)\right\}^2-(3y-1)^2+12y^2-18y+7$$

$$=4\left\{x-\frac{1}{2}(3y-1)\right\}^2+3y^2-12y+6$$

$$=\{2x-(3y-1)\}^2+3(y-2)^2-6$$

よって　$f(x,\ y)$ は　$x=\frac{1}{2}(3y-1)$　かつ　$y=2$

つまり　$\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$**,** $\boldsymbol{y=2}$　**のとき　最小値 −6 をとる.**

(2) $f(x,\ y)=a$　つまり $\{2x-(3y-1)\}^2+3(y-2)^2-6=a$　で a が負の値のとき

x, y は実数より　$\{2x-(3y-1)\}^2+3(y-2)^2<6$　……①

よって　$3(y-2)^2<6$　　$(y-2)^2<2$

y は整数より　$(y-2)^2\leqq 1$　　$-1\leqq y-2\leqq 1$　　$1\leqq y\leqq 3$　　よって　$y=1,\ 2,\ 3$

$y=1$ のとき　①より　$(2x-2)^2+3<6$　　$(x-1)^2<\frac{3}{4}$

これを満たす整数 x は $x=1$ のみ

$y=2$ のとき　①より　$(2x-5)^2<6$　　$(2x-5)^2\leqq 5$　　$-\sqrt{5}\leqq 2x-5\leqq\sqrt{5}$

つまり　$-2\leqq 2x-5\leqq 2$　　より　$\frac{3}{2}\leqq x\leqq\frac{7}{2}$　　よって　$x=2,\ 3$　のみ

$y=3$ のとき　①より　$(2x-8)^2+3<6$　　$(x-4)^2<\frac{3}{4}$　　よって　$x=4$　のみ

これらのうち，x, y が隣接 2 整数となるのは　$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$　のみ

$f(3,\ 2)=-5$, $f(4,\ 3)=-3$　より求める **$\boldsymbol{a}$ の最大値は　−3　($\boldsymbol{x=4}$, $\boldsymbol{y=3}$ のとき)**

3 ［1］　座標平面上で円 C：$x^2+(y-4)^2=16$　上の異なる 2 点 P，Q に対し，線分 PQ を 1：3 に内分する点を M とする．下の問いに答えよ．

(1)　点 P を原点に固定して，点 Q を円 C 上で動かしたときの点 M の軌跡を求めよ．

(2)　2 点 P，Q が円 C 上を動くとき，点 M が動く範囲を図示せよ．

(1)　Q$(s,\ t)$ とおくと　M$\left(\dfrac{s}{4},\ \dfrac{t}{4}\right)$　　M$(X,\ Y)$ とすると

$X=\dfrac{s}{4},\ Y=\dfrac{t}{4}$　　すなわち　$s=4X,\ t=4Y$

$(s,\ t)$ は円 C 上の点より

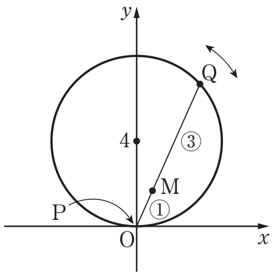
$(4X)^2+(4Y-4)^2=16$　　$16X^2+16(Y-1)^2=16$

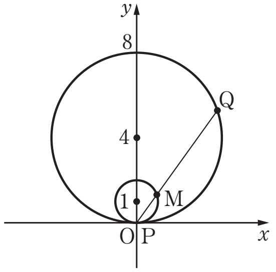
$X^2+(Y-1)^2=1$

$(s,\ t)\neq(0,\ 0)$ より　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

よって　求める軌跡は

中心 (0，1)　半径 1 の円　（ただし (0，0) を除く）





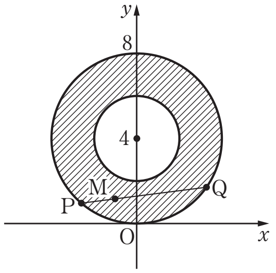
(2)　(1)の円は点 P で円 C と接する円である．

よって点 P が円 C 上の任意の点のとき，

点 Q を動かしたときの M の軌跡は，

点 P で円 C に接する半径 1 の円である（点 P を除く）．

よって求める点 M の動く範囲は右図斜線部分（境界は円 $x^2+(y-4)^2=4$ を含み，円 $x^2+(y-4)^2=16$ を含まない）



3 ［2］　2 つの関数　$y=ax^2+b,\ y=|(x-1)(x+1)|$　のグラフが共有点をもつための必要十分条件を a，b を用いて表し，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を座標平面上に図示しなさい．

［2］　$ax^2+b=|(x-1)(x+1)|$　……①　について

(i)　$x\leqq -1,\ 1\leqq x$　のとき

①より　$ax^2+b=(x-1)(x+1)$

$(a-1)x^2=-b-1$

$a=1$ のとき　$b=-1$ であれば　x は任意

$a\neq 1$ のとき　$x^2=\dfrac{-b-1}{a-1}$　　$x^2\geqq 1$ より　$\dfrac{-b-1}{a-1}\geqq 1$

よって　$\boldsymbol{a>1}$ **のとき**　$\boldsymbol{b\leqq -a}$　　$\boldsymbol{a<1}$ **のとき**　$\boldsymbol{b\geqq -a}$　　……②

(ii)　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

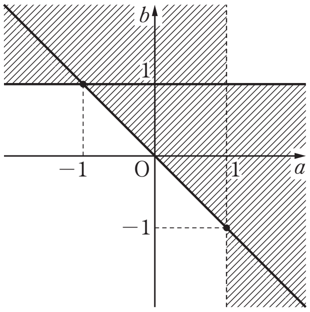
①より　$ax^2+b=-(x-1)(x+1)$

$(a+1)x^2=-b+1$

$a=-1$ のとき　$b=1$ であれば　x は任意

$a \neq -1$ のとき　$x^2=\dfrac{-b+1}{a+1}$　　$0 \leqq x^2 \leqq 1$ より　$0 \leqq \dfrac{-b+1}{a+1} \leqq 1$

よって　**$a>-1$ のとき　$-a \leqq b \leqq 1$　　$a<-1$ のとき　$1 \leqq b \leqq -a$**　……③



$(a,\ b)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$　および②または③より
求める領域は右図斜線部分.
境界は実線部分を含み
点線部分は含まない.

第42講　総合問題⑽

1　座標平面上に点A(3, 0)，B(0, 4)がある．点Pが単位円C：$x^2+y^2=1$上を動くとき，次の各問いに答えよ．

(1)　△PABの面積が最小となる点Pの座標を求めよ．

(2)　PA^2+PB^2が最小となる点Pの座標を求めよ．

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$　$(0\leqq\theta<2\pi)$　とおく．

(1)　点Pと直線AB：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$　すなわち　$4x+3y-12=0$　の距離は

点Pが領域$4x+3y-12<0$　にあることより

$$\frac{|4\cos\theta+3\sin\theta-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=-\frac{4\cos\theta+3\sin\theta-12}{5}=-\frac{1}{5}\{5\sin(\theta+\alpha)-12\}$$

$$=-\sin(\theta+\alpha)+\frac{12}{5}\qquad \text{ただし}\quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$　のとき最小となる．

このとき　$P\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=(\sin\alpha,\ \cos\alpha)=\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{5}}\right)$

(2)　$PA^2+PB^2=(\cos\theta-3)^2+\sin^2\theta+\cos^2\theta+(\sin\theta-4)^2$

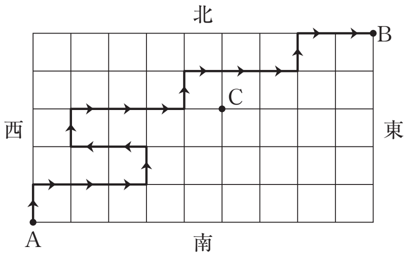
$$=-8\sin\theta-6\cos\theta+27=-10\cos(\theta-\beta)+27$$

ただし，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$

これが最小となるのは　$\theta=\beta$のとき

このとき　$P(\cos\theta,\ \sin\theta)=(\cos\beta,\ \sin\beta)=\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}\right)$

2　図のように東西に6本，南北に10本の道がある．東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする．A地点からB地点に進むとき，次の問いに答えよ．ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする．また，後戻りもできないとする．図の中の太線は道順の例を示したものである．



(1)　A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ．

(2)　C地点を通って，A地点からB地点へ行く道順の総数を求めよ．

(3)　A地点からB地点まで16区間で行く道順の総数を求めよ．

東，西，北へ行くことをそれぞれ　→，←，↑　と表す．また，東西の道を下から$y=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 5$，　南北の道を左から　$x=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 9$　に対応させる．

(1)　$y=0$ から $y=1$ に上がる道は　$x=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$ の 10 通り
$y=1$ から $y=2$, $y=2$ から $y=3$, $y=3$ から $y=4$, $y=4$ から $y=5$ も同様に 10 通り.
よって求める総数は　$10^5=\mathbf{100000}$ **(通り)**

(2)　$y=0$ から $y=2$ までの上がり方は　10^2（通り）
$y=2$ から $y=3$ に上がる道が
　$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき
　　　C を通った後に $y=4$ に上がる道は　$x=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$　のいずれか
　$x=6,\ 7,\ 8,\ 9$ のとき
　　　C を通った後に $y=4$ に上がる道は　$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$　のいずれか
よって　$y=2$　から　$y=4$　までの上がり方は　$5\times5+4\times6+10=59$（通り）
$y=4$ から $y=5$ の上がり方は　10 通り
したがって求める総数は $10^2\times59\times10=\mathbf{59000}$ **(通り)**

(3)　16 区画の移動のうち，↑は 5 回
残り 11 区画において，最低でも → に 9 回行く必要がある.
よって →10 回　かつ　←1 回　のときのみである.
これら 16 個の順列を考える.
→ と ← はとなり合わない．また，← は 1 番左と 1 番右にくることはない.
よって「↑←↑」(これを○とする) が順列の中に現れる.
○ 1 個，↑3 個，→10 個の順列は　$\dfrac{14!}{3!10!}=4004$（通り）
このうち，○の左側に → がないのは，○の左側に↑が k 個（$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$）あるとき
このときそれぞれ○の右側の順列を考えて $\dfrac{13!}{10!3!}+\dfrac{12!}{10!2!}+\dfrac{11!}{10!}+1=364$（通り）
○の右側に → がないときも同様 364 通り
したがって求める総数は　$4004-364\times2=\mathbf{3276}$ **(通り)**

3　数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n（$n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$）を
　　$a_1=2$, a_n が偶数のとき，$a_{n+1}=a_n+1$　……①,
　　a_n が奇数のとき　$a_{n+1}=2a_n$　……②
により定める．次の問いに答えよ．ただし，k は正の整数とする.
(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$　を求めよ.
(2)　a_{2k} を用いて，a_{2k+2} を表せ．また，a_{2k-1} を用いて，a_{2k+1} を表せ.
(3)　$a_{2k},\ a_{2k-1}$ を求めよ.

(1)　$a_1=2$ （偶数）より
①から　$\boldsymbol{a_2}=a_1+1=\mathbf{3}$ （奇数）　　②から　$\boldsymbol{a_3}=2a_2=\mathbf{6}$ （偶数）
①から　$\boldsymbol{a_4}=a_3+1=\mathbf{7}$ （奇数）　　②から　$\boldsymbol{a_5}=2a_4=\mathbf{14}$ （偶数）

①から　$\boldsymbol{a_6}=a_5+1=\mathbf{15}$　（奇数）

(2)　①，②より　a_n が偶数のとき　a_{n+1} は奇数　　a_n が奇数のとき　a_{n+1} は偶数

また，a_1（奇数番目の項）が偶数であることより，帰納的に

偶数番目の項は奇数，奇数番目の項は偶数となる．

よって k が正の整数のとき

$a_{2k+2}=a_{2k+1}+1=2a_{2k}+1$　　　$a_{2k+1}=2a_{2k}=2(a_{2k-1}+1)=2a_{2k-1}+2$

したがって　$\boldsymbol{a_{2k+2}=2a_{2k}+1}$　　　$\boldsymbol{a_{2k+1}=2a_{2k-1}+2}$

(3)　$a_{2(k+1)}=2a_{2k}+1$　より　$a_{2(k+1)}+1=2(a_{2k}+1)$，$a_2+1=4$

よって　$a_{2k}+1=4\cdot2^{k-1}=2^{k+1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_{2k}=2^{k+1}-1}$

$a_{2(k+1)-1}=2a_{2k-1}+2$　より　$a_{2(k+1)-1}+2=2(a_{2k-1}+2)$，$a_1+2=4$

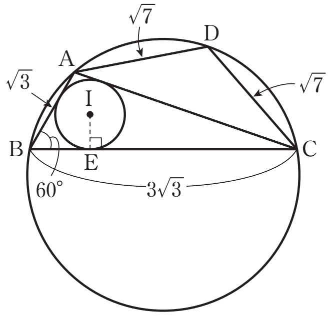
よって　$a_{2k-1}+2=4\cdot2^{k-1}=2^{k+1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_{2k-1}=2^{k+1}-2}$

第43講　総合問題(11)

1　円に内接する四角形ABCDがあり，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3\sqrt{3}$，$CD=DA=\sqrt{7}$，$\angle ABC=60^\circ$ を満たしている．また，点Aと点Cを線分で結び，三角形ABCの内接円の中心をI，その内接円と辺BCとの接点をEとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　IE，CE を求めよ．

(2)　点Iと点Dを線分で結ぶとき，IDを求めよ．



(1)　$IE=r$ とする．△ABCで余弦定理より

$AC^2=3+27-2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\cos60^\circ=21$　　$AC=\sqrt{21}$

よって，△ABCの面積について

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}r(\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\sqrt{21})$$

$$(4\sqrt{3}+\sqrt{21})r=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\frac{9}{2(4+\sqrt{7})}=\frac{9(4-\sqrt{7})}{2\cdot9}=\frac{4-\sqrt{7}}{2}$$

よって　$\mathbf{IE=\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$

内接円と辺CAの接点をFとし，$CE=CF=x$ とおくと

$BE=3\sqrt{3}-x$　　$AF=\sqrt{21}-x$

$AB=BE+AF$　より　$\sqrt{3}=3\sqrt{3}-x+\sqrt{21}-x$　　よって　$\mathbf{CE=x=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{2}}$

(2)　トレミーの定理より　$AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot3\sqrt{3}=\sqrt{21}\cdot BD$　　　よって　$BD=4$

内心の性質より　$\angle IBE=\dfrac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$

また，$\cos\angle DBC=\dfrac{16+27-7}{2\cdot4\cdot3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　より　$\angle DBC=30^\circ$

よってB，I，Dは一直線上にある．

$BI=2r=4-\sqrt{7}$　　　$DI=BD-BI=\mathbf{\sqrt{7}}$

2　実数 x，y が条件　$x^2+xy+y^2=6$　を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の最大値，最小値を求めよ．

$x^2+xy+y^2=6$　より　$(x+y)^2-xy=6$

$x+y=s$，$xy=t$　とおくと　$s^2-t=6$　　よって　$t=s^2-6$　……①

また，x，y は2次方程式　$x^2-sx+t=0$　の2解．これが実数より　$s^2-4t\geqq0$

①より　$s^2-4(s^2-6)\geqq0$　　$s^2\leqq8$　　よって　$-2\sqrt{2}\leqq s\leqq2\sqrt{2}$　……②

このとき　$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$

$=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)$

$=ts-s^2+s$

$=(s^2-6)s-s^2+s$

$=s^3-s^2-5s$

s	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(s)$	$-8-6\sqrt{2}$	↗	極大 3	↘	極小 $-\frac{175}{27}$	↗	$-8+6\sqrt{2}$

$f(s)=s^3-s^2-5s$　とおくと

$f'(s)=3s^2-2s-5=(3s-5)(s+1)$

ここで　$-\dfrac{175}{27}=-6.\cdots\cdots$　より　$-8-6\sqrt{2}<-\dfrac{175}{27}$

$-8+6\sqrt{2}-3=-11+6\sqrt{2}=-\sqrt{121}+\sqrt{72}<0$　より　$-8+6\sqrt{2}<3$

よって　**最大値　3　　最小値　$-8-6\sqrt{2}$**

3　(1)　整数からなる公差１の等差数列 $a,\ b,\ c,\ d$ で　$a^3+b^3+c^3=d^3$　を満たすものを求めよ.

(2)　0 でない整数からなる等比数列 $a,\ b,\ c,\ d$ で　$a^3+b^3+c^3=d^3$　を満たすものは存在しないことを示せ.

(1)　$a=b-1,\ c=b+1,\ d=b+2$　とおく.

$a^3+b^3+c^3=d^3$　より　$(b-1)^3+b^3+(b+1)^3=(b+2)^3$

$b^3-3b^2-3b-4=0$　　$(b-4)(b^2+b+1)=0$　　b は実数より　$b=4$　のみ

したがって　**$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 4,\ 5,\ 6)$**

(2)　$b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3$　($a\neq0$,　$r\neq0$,　r は有理数）とおく.

$a^3+b^3+c^3=d^3$　が成り立つとすると

$a^3+a^3r^3+a^3r^6=a^3r^9$　　$a\neq0$ より　$r^9-r^6-r^3-1=0$

$r^3=t$　とおくと　$t^3-t^2-t-1=0$

ここで　t が有理数であるとすると　$t=\dfrac{m}{n}$（m, n は互いに素の整数, $n>0$）とおける.

このとき　$\left(\dfrac{m}{n}\right)^3-\left(\dfrac{m}{n}\right)^2-\left(\dfrac{m}{n}\right)-1=0$　　$m^3-nm^2-n^2m-n^3=0$

$m^3=n(m^2+nm+n^2)$　　m, n は互いに素より　$n=1$

このとき　$m^3-m^2-m-1=0$　より　$m(m^2-m-1)=1$　……①

m は整数より　$m=1$ または $m=-1$　であるが, このいずれも①を満たさない.

よって t は無理数である. したがって $r^3=t$ を満たす有理数 r は存在しない.

したがって示された.

第 44 講　総合問題⑿

| 1 |　k を正の整数とする．$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n がちょうど1個であるような k をすべて求めよ．

$f(x)=5x^2-2kx+1$ とおくと，

グラフの軸　$x=\dfrac{k}{5}>0$　　$f(0)=1>0$　よって　$x\leqq 0$ のとき　$f(x)$ は常に正．

よって　$f(n)<0$ を満たす整数 n は正である．

$f(1)\geqq 0$ とすると，$6-2k\geqq 0$　　$k\leqq 3$　これを満たす自然数 k は　$k=1,\ 2,\ 3$　のみ

このとき　$\dfrac{1}{5}\leqq(\text{軸})\leqq\dfrac{3}{5}$　　つまり　$0<(\text{軸})<1$　より

$x\geqq 1$ のとき　$f(x)$ は常に正となり，$f(n)<0$ となる整数 n は存在しない．

よって題意を満たす整数 n がただ1つ存在するのは

　　$f(1)<0$　かつ　$f(2)\geqq 0$　のとき

つまり　$6-2k<0$　かつ　$21-4k\geqq 0$　　$3<k\leqq\dfrac{21}{4}$　　したがって $\boldsymbol{k=4,\ 5}$

| 2 |　xy 平面の原点をOとする．xy 平面上のOと異なる点Pに対し，直線OP上の点Qを，次の条件(a)，(b)を満たすようにとる．

　(a)　OP・OQ＝4　　　(b)　Qは，Oに関してPと同じ側にある．

このとき，次の問いに答えよ．

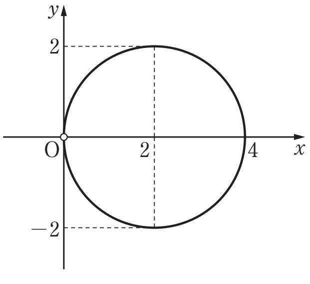
(1)　点Pが直線 $x=1$ の上を動くとき，点Qの軌跡を求めて，図示せよ．

(2)　$a>r>0$ とする．点Pが円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ の上を動くとき，点Qの軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

OP＝p，OQ＝q とすると，$pq=4$　つまり　$p=\dfrac{4}{q}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{p}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4}{q^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　　よって　$\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，$(s,\ t)=\dfrac{4}{X^2+Y^2}(X,\ Y)$

つまり　$s=\dfrac{4X}{X^2+Y^2}$，$t=\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}$



(1)　点Pが $x=1$ 上にあるとき　$\dfrac{4X}{X^2+Y^2}=1$

　$X^2+Y^2=4X$　かつ　$X^2+Y^2\neq 0$

　$(X-2)^2+Y^2=4$　かつ　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

　よって　点Qの軌跡は　**中心 (2, 0)　半径2の円　（ただし (0, 0) を除く）**

(2)　$(s-a)^2+t^2=r^2$　より　$\left(\dfrac{4X}{X^2+Y^2}-a\right)^2+\left(\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}\right)^2=r^2$

$$\frac{16X^2}{(X^2+Y^2)^2}-2a\cdot\frac{4X}{X^2+Y^2}+a^2+\frac{16Y^2}{(X^2+Y^2)^2}=r^2$$

$\dfrac{16}{X^2+Y^2}-\dfrac{8aX}{X^2+Y^2}+a^2-r^2=0$

$(a^2-r^2)(X^2+Y^2)-8aX+16=0$　かつ　$X^2+Y^2\neq 0$

$a>r>0$　より　$a^2-r^2>0$　よって

$X^2+Y^2-\dfrac{8aX}{a^2-r^2}+\dfrac{16}{a^2-r^2}=0$　かつ　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$　（これは満たされる）

$\left(X-\dfrac{4a}{a^2-r^2}\right)^2+Y^2=\dfrac{16r^2}{(a^2-r^2)^2}$

よって　**点 Q の軌跡は　中心 $\left(\dfrac{4a}{a^2-r^2},\ 0\right)$　半径　$\dfrac{4r}{a^2-r^2}$　の円**

3　実数 a，b，c に対して，3 次関数　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　を考える．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

(2)　$f(2010)$，$f(2011)$，$f(2012)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

---

(1)　$f(-1)=a-b+c-1=p$　……①　　　$f(0)=c=q$　……②

$f(1)=a+b+c+1=r$　……③　　（p，q，r は整数）　とおく．

①，②より　$a-b=p-q+1$　　　②，③より　$a+b=r-q-1$

これらより　$a=\dfrac{r+p-2q}{2}$，$b=\dfrac{r-p-2}{2}$

このとき　$f(x)=x^3+\dfrac{r+p-2q}{2}x^2+\dfrac{r-p-2}{2}x+q$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)p+(-x^2+1)q+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)r+x^3-x$$

$$=\frac{1}{2}x(x-1)p+(-x^2+1)q+\frac{1}{2}x(x+1)r+(x-1)x(x+1)$$

x が整数のとき　$x(x-1)$，$x(x+1)$ は連続 2 整数の積より偶数である．

したがって，すべての整数 n で　$f(n)$ は整数となる．

(2)　$g(x)=f(x+2011)$

$=(x+2011)^3+a(x+2011)^2+b(x+2011)+c$

$=x^3+Ax^2+Bx+C$　　（A，B，C は実数）　とおく．

このとき　$f(2010)=g(-1)$　　$f(2011)=g(0)$　　$f(2012)=g(1)$　が整数のとき

(1)と同様にして，すべての整数 k に対して

$g(k)=f(k+2011)$ は整数である．

$k+2011=n$　とおくと n も整数より　すべての整数 n で $f(n)$ は整数である．

第 45 講　総合問題⒀

1　2 つの箱 A，B に赤玉と白玉が入っており，箱 A の赤玉と白玉の個数の比率は $p:1-p$ $(0<p<1)$，箱 B の赤玉と白玉の個数の比率は $q:1-q$ $(0<q<1)$ であるとする．この 2 つの箱のどちらかを選び，そこから玉を 1 個取り出して色を調べてもとに戻すという操作を繰り返し行うものとする．取り出した玉が赤玉であれば次は箱 A から玉を取り出すものとし，白玉であれば次は箱 B から玉を取り出すものとする．最初は箱 A から玉を取り出すことにしたとき，第 n 回目に赤玉を取り出す確率を a_n とする．$a_1=p$ である．

(1)　a_2 を p，q を用いて表せ．

(2)　a_{n+1} を a_n，p，q を用いて表せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　第 2 回目に赤玉を取り出すのは，以下のいずれかの場合である．

(i)　1 回目に A から赤玉を取り出し，2 回目に A から赤玉を取り出す

(ii)　1 回目に A から白玉を取り出し，2 回目に B から赤玉を取り出す

よって　$a_2=p\times p+(1-p)\times q=\boldsymbol{p^2+q-pq}$

(2)　第 $(n+1)$ 回目に赤玉を取り出すのは，以下のいずれかの場合である．

(i)　n 回目に赤玉を取り出し，$(n+1)$ 回目に A から赤玉を取り出す．

(ii)　n 回目に白玉を取り出し，$(n+1)$ 回目に B から赤玉を取り出す．

よって　$a_{n+1}=a_n\times p+(1-a_n)\times q$　より　$\boldsymbol{a_{n+1}=(p-q)a_n+q}$

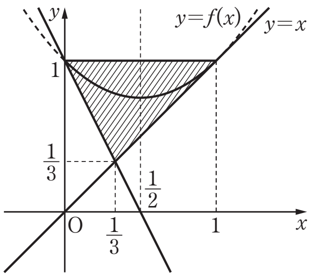
(3)　$a_{n+1}=(p-q)a_n+q$，$a_1=p$　より

$$a_{n+1}-\frac{q}{1-p+q}=(p-q)\left(a_n-\frac{q}{1-p+q}\right)$$

$$a_1-\frac{q}{1-p+q}=p-\frac{q}{1-p+q}=\frac{p-p^2+pq-q}{1-p+q}=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}$$

よって $a_n-\dfrac{q}{1-p+q}=\dfrac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}$　したがって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{q+(1-p)(p-q)^n}{1-p+q}}$

2　$0\leqq x\leqq 1$ において，連立不等式　$1-2x\leqq f(x)$，$x\leqq f(x)$，$f(x)\leqq 1$　を満たす 2 次関数 $f(x)$ で，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値が最小になるものを求めよ．またその最小値を求めよ．



$1-2x \leqq f(x)$ ……①　　　$x \leqq f(x)$ ……②

$f(x) \leqq 1$ ……③　とする．

①，③で $x=0$ のとき

　$1 \leqq f(0)$　かつ　$f(0) \leqq 1$　より　$f(0)=1$ ……④

②，③で $x=1$ のとき

　$1 \leqq f(1)$　かつ　$f(1) \leqq 1$　より　$f(1)=1$ ……⑤

④，⑤より　放物線 $y=f(x)$ は　$x=0,\ 1$ で $y=1$ と交わる．

よって　$f(x)=ax(x-1)+1=ax^2-ax+1=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{a}{4}+1$　とおけ，

③より　$a>0$ である．

②が成り立つのは，$y=f(x)$ の $x=1$ における接線の傾きが 1 以下のとき．

　　$f'(x)=2ax-a$　より　$f'(1)=a$　　よって　$a \leqq 1$

このときグラフの対称性より　$1-x \leqq f(x)$　が成り立つ．

$0 \leqq x \leqq 1$ で $1-2x \leqq 1-x$　より　$1-2x \leqq f(x)$　つまり①も成り立つ．

したがって　$0<a \leqq 1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^2-ax+1)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^1=-\frac{1}{6}a+1$$

$0<a \leqq 1$ において　S は $a=1$ のとき最小値　$-\frac{1}{6}+1=\frac{5}{6}$　をとる．

したがって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-x+1}$　　**最小値は** $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$

3　空間内に三角形 ABC と定点 O を中心とする半径 1 の球面 S とがある．点 P が S 上のすべての点を動くときの　$AP^2+BP^2+CP^2$　の最大値，最小値をそれぞれ M，m とするとき，次の問いに答えよ．ただし，三角形 ABC の重心 G は　$OG>1$　を満たすものとする．

(1)　$M=AQ^2+BQ^2+CQ^2$　となる S 上の点を Q，$m=AR^2+BR^2+CR^2$　となる S 上の点を R とするとき，3 点 Q，R，G は 1 直線上にあること示せ．

(2)　$\sqrt{M-(GA^2+GB^2+GC^2)}-\sqrt{m-(GA^2+GB^2+GC^2)}$ の値は三角形 ABC の形状および位置に無関係に定まることを示し，その値を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$，$\overrightarrow{OR}=\vec{r}$，$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$　とおく．

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2+CP^2&=|\vec{p}-\vec{a}|^2+|\vec{p}-\vec{b}|^2+|\vec{p}-\vec{c}|^2\\&=3|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&=3-6\vec{p}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&=-6\vec{p}\cdot\vec{g}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+3\end{aligned}$$

　よって　$\vec{p}\cdot\vec{g}$ の最大，最小を考える．$|\vec{p}|$，$|\vec{g}|$ は一定より，

$\vec{p}$ と $\vec{g}$ が同じ向きのとき $\vec{p}\cdot\vec{g}$ は最大．このとき　$\vec{p}=\vec{r}$

$\vec{p}$ と $\vec{g}$ が反対向きのとき $\vec{p}\cdot\vec{g}$ は最小．このとき　$\vec{p}=\vec{q}$

したがって　$\vec{q}$ は $\vec{g}$ と反対向き，$\vec{r}$ は $\vec{g}$ と同じ向きである．

ゆえに３点 Q，R，G は１直線上にある．

(2)　$(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{GP}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2-(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)$

$=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}-\vec{g}+\vec{b}-\vec{g}+\vec{c}-\vec{g}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}=3\vec{g}-3\vec{g}=\vec{0}$　より

$(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2$

よって　$\sqrt{M-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}=\sqrt{3|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|^2}=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|$

$\sqrt{m-(\mathrm{GA}^2+\mathrm{GB}^2+\mathrm{GC}^2)}=\sqrt{3|\overrightarrow{\mathrm{GR}}|^2}=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{GR}}|$　より

求める値は $\sqrt{3}\,(|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|-|\overrightarrow{\mathrm{GR}}|)=\sqrt{3}\times 2=\mathbf{2\sqrt{3}}$　**（＝一定）**

第 46 講　総合問題⒁

1　$a>0$，$a\neq 1$　とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　正の実数 x，y に対して，$\log_a \dfrac{x+y}{2}$ と $\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)$　の大小関係を調べよ．

(2)　実数 x，y に対して，$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　が成り立つとき，$\dfrac{1}{x}$ および $\dfrac{1}{y}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　(2)において，$k=2x+y$　のとり得る値の範囲を求めよ．

(4)　$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$　を満たす整数 x，y の値をすべて求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)=\dfrac{1}{2}\log_a xy=\log_a\sqrt{xy}$

$a>1$ のとき　$\log_a\dfrac{x+y}{2}\geqq\log_a\sqrt{xy}$　　よって　$\boldsymbol{\log_a\dfrac{x+y}{2}\geqq\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)}$

$0<a<1$ のとき　$\boldsymbol{\log_a\dfrac{x+y}{2}\leqq\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)}$

(2)　$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

よって　$x+y=xy$　　真数条件より　$x,\ y>0$　　したがって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$

$x>0$　かつ　$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{x}>0$　　よって　$\boldsymbol{0<\dfrac{1}{x}<1}$　同様に　$\boldsymbol{0<\dfrac{1}{y}<1}$

(3)　$k=2x+y=(2x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}+3\geqq 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{y}{x}}+3=3+2\sqrt{2}$

よって　$\boldsymbol{k\geqq 3+2\sqrt{2}}$

(4)　$\log_a(x+y)=\log_a xy$　より　$x+y=xy$　つまり　$(x-1)(y-1)=1$

$x>1$，$y>1$　より　$x-1>0$，$y-1>0$

よって　$(x-1,\ y-1)=(1,\ 1)$　　したがって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 2)}$

2　a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$　とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$x_1=a$，$x_{n+1}=f(x_n)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

で定める．次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n について，$x_n=a$ となるとき，a を求めよ．

(2)　$a<1$ のとき，$x_n<1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

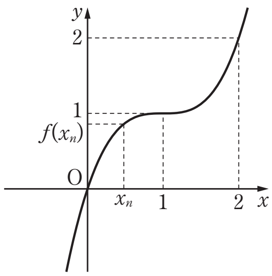
(3)　$0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

$f(x)=x^3-3x^2+3x=x(x^2-3x+3)$　より

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqq 0$　よって　$f(x)$ は単調増加．

(1)　$x_{n+1}=f(x_n)=x_n{}^3-3x_n{}^2+3x_n$　において，すべての自然数 n で $x_n=a$ のとき

$a=a^3-3a^2+3a$　より　$a(a-1)(a-2)=0$　　よって　$\boldsymbol{a=0,\ 1,\ 2}$



(2)　$a<1$ のとき　$x_n<1$　……①　が成り立つことを示す.

$n=1$ のとき　$x_1=a<1$　より　①は成り立つ.

$n=k$ のとき　①すなわち　$a_k<1$　が成り立つとすると

グラフより　$x_{k+1}=f(x_k)<f(1)=1$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ.

したがってすべての自然数 n で①は成り立つ.

(3)　$0<a<1$ のとき　$x_n>0$　……②が成り立つことを示す.

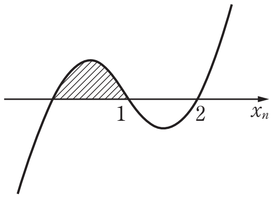
$n=1$ のとき　$x_1=a>0$　より　②は成り立つ.

$n=k$ のとき　②すなわち　$a_k>0$　が成り立つとすると

グラフより　$x_{k+1}=f(x_k)>f(0)=0$　よって　$n=k+1$ のときも②は成り立つ.

したがってすべての自然数 n で②は成り立つ.

(2)と合わせて，すべての自然数 n で　$0<x_n<1$ が成り立つ.



よって　$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n=x_n{}^3-3x_n{}^2+2x_n$

$=x_n(x_n-1)(x_n-2)>0$

ゆえに $x_n<x_{n+1}$

3　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ と定める.

(1)　$x\geqq 0$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2)　x を正の有理数とし，$f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p，q を用いて　$f(x)=\dfrac{q}{p}$ と表す．このとき，$q\leqq 3$　となるような x をすべて求めよ.

---

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}=k$　とおく.

$x^2+2=k(x^2-2x+3)$　　$(k-1)x^2-2kx+3k-2=0$　……①

これを満たす実数 x が $x\geqq 0$ に存在するときの k の範囲を求める.

$k=1$ のとき　①より　$-2x+1=0$　$x=\dfrac{1}{2}$　　よって存在する.

$k\neq 1$ のとき　①の両辺を $k-1$ で割ると

$$x^2-\frac{2k}{k-1}x+\frac{3k-2}{k-1}=0$$

この式の左辺を $g(x)$ とおくと　軸：$x=\dfrac{k}{k-1}$　　$g(0)=\dfrac{3k-2}{k-1}$

判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=\dfrac{1}{(k-1)^2}\{k^2-(3k-2)(k-1)\}=-\dfrac{1}{(k-1)^2}(2k-1)(k-2)$

$D\geqq 0$ より　$(2k-1)(k-2)\leqq 0$　　$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 2$

(i)　$\frac{1}{2} \leqq k < 1$ のとき　軸<0　　よって　$x \geqq 0$ に解をもつのは　$g(0) \leqq 0$

つまり　$3k-2 \geqq 0$　　$k \geqq \frac{2}{3}$　　　したがって　$\frac{2}{3} \leqq k < 1$

(ii)　$1 < k \leqq 2$ のとき　軸>0

よって　$x \geqq 0$ に少なくとも1解をもつ．したがって　$\frac{2}{3} \leqq k \leqq 2$

以上より　$\boldsymbol{\frac{2}{3} \leqq f(x) \leqq 2}$

(2)　自然数 q について　$q \leqq 3$　より　$q=1,\ 2,\ 3$

$q=1$ のとき　$f(x)=\frac{1}{p}$　これを満たす自然数 p は　(1)より　$p=1$ のみ

このとき　$f(x)=1$　となる x は　(1)より　$x=\frac{1}{2}$

$q=2$ のとき　$f(x)=\frac{2}{p}$　これを満たす2と互いに素な自然数 p は　$p=1,\ 3$

$p=1$ のとき　$f(x)=2$　より　$x^2-4x+4=0$　　$x=2$

$p=3$ のとき　$f(x)=\frac{2}{3}$　より　$x^2+4x=0$　これを満たす正の数 x はない．

$q=3$ のとき　$f(x)=\frac{3}{p}$　これを満たす3と互いに素な自然数 p は　$p=2,\ 4$

$p=2$ のとき　$f(x)=\frac{3}{2}$　より　$x^2-6x+5=0$　$x=1,\ 5$

$p=4$ のとき　$f(x)=\frac{3}{4}$　より　$x^2+6x-1=0$　$x=-3\pm\sqrt{10}$　これは有理数でない．

以上より　$\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 5}$

第47講　総合問題⑮

1　実数 a，b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$　とおく．

(1)　$a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$　を満たす実数 c を求めよ．

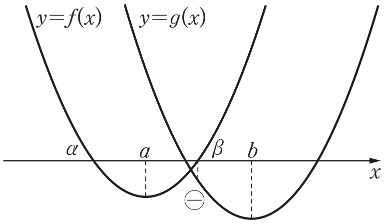
(2)　(1)で求めた c について，a，b が条件　$a<c<b$　を満たすとする．このとき，連立不等式

$$f(x)<0 \quad かつ \quad g(x)<0$$

が解をもつための必要十分条件を a，b を用いて表せ．

(1)　$f(c)=g(c)$　より　$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a$

$2(a-b)c=b-a$　　$a\neq b$　より　$\boldsymbol{c=-\dfrac{1}{2}}$



(2)　$a<c<b$　より　$a<-\dfrac{1}{2}<b$

$f(x)<0$　かつ　$g(x)<0$　が解をもつとき，

$f(x)=0$ の2解を α，β（$\alpha<\beta$）とすると

$\beta^2-2a\beta+b=0$　つまり　$\beta^2=2a\beta-b$　……①

このとき　$g(\beta)<0$　であることが必要．

①より　$g(\beta)=\beta^2-2b\beta+a$

$$=2a\beta-b-2b\beta+a=2\beta(a-b)+(a-b)=(a-b)(2\beta+1)$$

$a<b$ より　$a-b<0$

よって　$g(\beta)<0$ が成り立つためには　$2\beta+1>0$　つまり $\beta>-\dfrac{1}{2}$　であることが必要

$f(x)=0$　より　$x=a\pm\sqrt{a^2-b}$　　よって　$\beta=a+\sqrt{a^2-b}>-\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt{a^2-b}>-(2a+1)$　　$a<-\dfrac{1}{2}$ より両辺は正．よって両辺を2乗すると

$4(a^2-b)>4a^2+4a+1$　　$a+b+\dfrac{1}{4}<0$

このとき $f(x)=0$ の判別式 D について $\dfrac{D}{4}=a^2-b>a^2+a+\dfrac{1}{4}=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq 0$　より

確かに $f(x)=0$ は異なる2解 α，β をもつ．

逆に　$a+b+\dfrac{1}{4}<0$　のとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b+\dfrac{1}{4}<0$　より

$f(x)<0$　かつ　$g(x)<0$　は解 $x=-\dfrac{1}{2}$ をもつ．

よって求める条件は　$\boldsymbol{a+b+\dfrac{1}{4}<0}$

2　xy 平面上に円 $C：x^2+(y+2)^2=4$　がある．中心　$(a,\ 0)$，半径１の円を D とする．C と D が異なる２点で交わるとき，次の問いに答えよ．

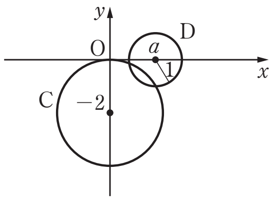
(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　C と D の２つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

(3)　a が(1)の範囲を動くとき，(2)の直線が通過する領域を図示せよ．

(1)　$\mathrm{C}：x^2+(y+2)^2=4$　　中心 $(0,\ -2)$　半径２

$\mathrm{D}：(x-a)^2+y^2=1$　　中心 $(a,\ 0)$　半径１



C と D の中心間の距離は　$\sqrt{a^2+4}$

C と D が異なる２点で交わるのは

(中心間距離)＜(２円の半径の和)　のとき

よって　$\sqrt{a^2+4}<3$　　$a^2+4<9$　　$a^2<5$

よって　$\boldsymbol{-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}}$

(2)　$\{x^2+(y+2)^2-4\}+k\{(x-a)^2+y^2-1\}=0$　より

$(1+k)x^2+(1+k)y^2-2akx+4y+(a^2-1)k=0$

$k=-1$　のときこの式は２円 C，D の交点を通る直線を表す．

よって　$\boldsymbol{2ax+4y-a^2+1=0}$

(3)　(2)の直線は $y=-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

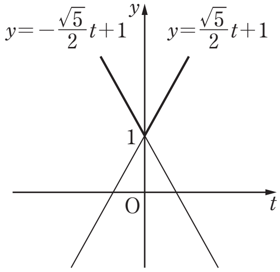
ここで x を $x=t$ に固定し，右辺を a の関数 $f(a)$ とみると

$$f(a)=\frac{1}{4}a^2-\frac{t}{2}a-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a-t)^2-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$$

$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ における y のとりうる値が，求める直線の通過領域のうち $x=t$ 上に存在する y の変域である．

(i)　$t\leqq-\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})<y<f(\sqrt{5})$　つまり　$\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1<y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1$



(ii)　$-\sqrt{5}<t<\sqrt{5}$ のとき　$f(t)\leqq y<\max\{f(-\sqrt{5}),\ f(\sqrt{5})\}$

つまり　$-\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{4}\leqq y<\max\left\{\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1\right\}$　より

$-\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{4}\leqq y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}|t|+1$

(iii)　$\sqrt{5}\leqq t$　のとき $f(\sqrt{5})<y<f(-\sqrt{5})$　　つまり　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1<y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+1$

x を動かすことにより

$x \leqq -\sqrt{5}$　のとき $\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$　のとき

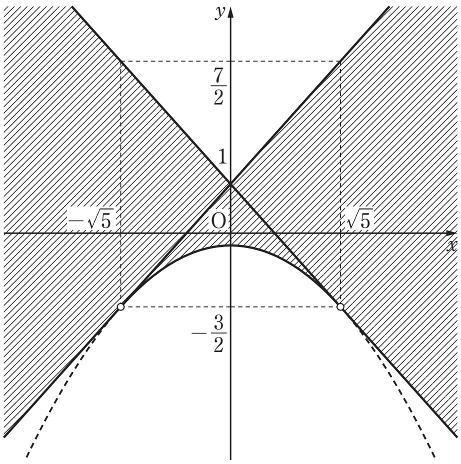
$-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4} \leqq y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x|+1$

$\sqrt{5} \leqq x$ のとき　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+1$

よって求める通過領域は，右図斜線部分.

境界は　$y=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}$　（$|x|<\sqrt{5}$）のみ含み

他は含まない.



$\boxed{3}$ [1]　係数 a，b が整数である3次方程式　$x^3+ax^2+bx+1=0$ が2つの虚数解と1つの整数解をもつ．これを満たす整数の組 $(a,\ b)$ はいくつあるか求めよ．またそのうち a の値が最大となるときの $(a,\ b)$ を求めよ.

$x^3+ax^2+bx+1=0$　……①　の実数解を $x=n$　とおくと

①は　$(x-n)(x^2+px+q)=0$　……②　（p，q は実数）と変形できる.

①と②の係数を比較して

$a=-n+p$　……④　　$b=-np+q$　……⑤　　$1=-nq$　……⑥

a，n は整数より　④から p も整数　　よって　⑤より q も整数

また，$x^2+px+q=0$　が虚数解をもつので　$p^2-4q<0$　……⑦

よって　$0 \leqq p^2<4q$　より　$q>0$　　したがって　⑥より　$n=-1$，$q=1$

このとき④，⑤より　$a=p+1$，$b=p+1$

また⑦より　$p^2-4<0$　　p は整数より　$p=-1,\ 0,\ 1$

したがって　**$(a,\ b)=(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$　の3組.**

このうち a が最大となるのは　$(a,\ b)=(2,\ 2)$

$\boxed{3}$ [2]　2以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ.

n が3の倍数のとき　n が素数になるのは $n=3$ のみ

このとき $n^2+2=3^2+2=11$　これは確かに素数である

n が3の倍数でないとき $n=3k\pm1$　（k：自然数）　と表せる.

$n=3k+1$　のとき $n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1) \geqq 3(3+2+1)>3$

$n=3k-1$ のとき　$n^2+2=3(3k^2-2k+1) \geqq 3(3-2+1)>3$

よっていずれも3より大きい3の倍数より素数ではない.

以上より題意を満たすのは $n=3$ に限ることが示された.

第 48 講　総合問題⒃

1　正の数 x に対して，3 辺の長さが　$AB=x+1$，$BC=\sqrt{x^2+x+1}$，$CA=k\sqrt{x}$　で与えられる三角形 ABC を考える．次の問いに答えよ．

(1)　$x=2$　のとき，三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ．

(2)　任意の正の数 t に対して不等式

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{3}\quad \cdots\cdots①$$

および　$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3}\quad \cdots\cdots②$$

が成立することを示せ．

(3)　(2)の結果を利用して，任意の正の数 x に対して三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ．

(1)　$x=2$ のとき　$AB=3$　　$BC=\sqrt{7}$　　$CA=k\sqrt{2}$

三角形の成立条件より　$3-\sqrt{7}<k\sqrt{2}<3+\sqrt{7}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}}$

(2)　$t>0$ のとき　$\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\geqq 2\sqrt{\sqrt{t}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}}=2$　　$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

等号成立はともに $t=1$ のとき

よって　$\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{2+1}=2+\sqrt{3}$　（等号成立は $t=1$ のとき）

したがって①は示された．このとき①の両辺は正よりそれぞれの辺で逆数をとって

$$\frac{1}{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}}\leqq\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$$

$$(\text{左辺})=\frac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}}{\left(\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)}=\frac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}}{t+2+\dfrac{1}{t}-\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)}$$

$$=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$$

よって　$\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\dfrac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3}$　より②は示された．

（等号成立は $t=1$ のとき）

(3)　$x>0$ のとき　$BC=\sqrt{x^2+x+1}<\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=x+1=AB$　より

$BC<AB$

よって三角形の成立条件より　$x+1-\sqrt{x^2+x+1}<k\sqrt{x}<x+1+\sqrt{x^2+x+1}$

両辺を $\sqrt{x}$ で割って　$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}<k<\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}$　……③

(2)より　$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}\leqq 2-\sqrt{3}$　　$2+\sqrt{3}\leqq\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}$

より

③が任意の正の数 x で成立する k の値の範囲は　$\boldsymbol{2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}}$　である.

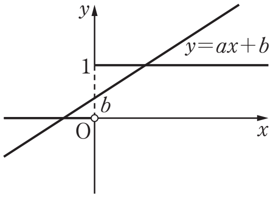
2　関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases}1\,(x\geqq 0)\\0\,(x<0)\end{cases}$　により定める.

(1)　a, b は実数とする．$y=ax+b$　のグラフと　$y=f(x)$　のグラフがちょうど 2 つの交点を持つための a, b に対する条件を求めよ.

(2)　p, q は実数で $p>0$ とする．$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$　のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点を持つための p, q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ.

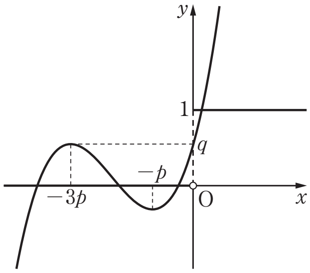
---

(1)　直線 $y=ax+b$ の傾き a について　$a>0$　であることが必要
このとき　直線の y 切片 b について　$0<b\leqq 1$　であれば題意を満たす.
よって求める条件は　$\boldsymbol{a>0,\ 0<b\leqq 1}$



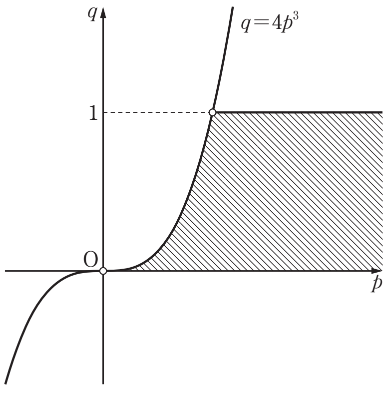
(2)　$g(x)=x^3+6px^2+9p^2x+q$　とおくと
$g'(x)=3x^2+12px+9p^2=3(x+3p)(x+p)$ $(p>0)$

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	q	↘	$-4p^3+q$	↗



よって　$g(-3p)=g(0)=q$　について $0<q\leqq 1$
　　　　$g(-p)=-4p^3+q$　について $-4p^3+q<0$　であれば題意を満たす.

したがって求める条件は　$\boldsymbol{0<q\leqq 1,\ q<4p^3}$
これらの表す領域は右図斜線部分.
境界は $q=4p^3$　および $q=0$ 上の点を含まず
他は含む.



3　平面上の点で，その座標が両方とも整数であるものを格子点と呼ぶ．原点をOとし，O以外の格子点Pに対して，線分OP上にあるOとP以外の格子点の個数を$n(\mathrm{P})$で表す．たとえば点$\mathrm{P}(2,\ 3)$については$n(\mathrm{P})=0$である．条件

$1 \leqq a \leqq 30$　かつ　$1 \leqq b \leqq 30$　かつ　$n(\mathrm{P})=4$

をみたす格子点$\mathrm{P}(a,\ b)$の個数を求めよ．

OP：$y=\dfrac{b}{a}x$　これを　$y=\dfrac{n}{m}x$（m，nは互いに素の自然数）とおく．

この直線上にある格子点（Oを除く）は

$(m,\ n),\ (2m,\ 2n),\ (3m,\ 3n),\ \cdots\cdots$　である．

$n(P)=4$　より　$(a,\ b)=(5m,\ 5n)$である．

また，$1 \leqq a \leqq 30$，$1 \leqq b \leqq 30$　より　$1 \leqq 5m \leqq 30$　　$1 \leqq 5n \leqq 30$

つまり$1 \leqq m \leqq 6$，$1 \leqq n \leqq 6$　である．

(i)　$m=n$のとき

m，nは互いに素より　$m=n=1$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 5)$

(ii)　$m<n$のとき

$n=2$のとき　$m=1$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 10)$

$n=3$のとき　$m=1,\ 2$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 15),\ (10,\ 15)$

$n=4$のとき　$m=1,\ 3$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 20),\ (15,\ 20)$

$n=5$のとき　$m=1,\ 2,\ 3,\ 4$　　よって　$(a,\ b)=(5,\ 25),\ (10,\ 25),\ (15,\ 25),\ (20,\ 25)$

$n=6$のとき　$m=1,\ 5$　よって　$(a,\ b)=(5,\ 30),\ (25,\ 30)$

よってPの個数は11

(iii)　$m>n$のとき

(ii)においてmとnを入れ替えることにより，Pの個数は11

以上より求めるPの個数は　$11 \times 2+1=\mathbf{23}$

練習問題解答

第 25 講　数列(3)

数列 $\{a_n\}$: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, …… について次の問いに答えよ.

(1) $\frac{35}{49}$ は数列 $\{a_n\}$ の第 **アイウエ** 項である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 1005 項までの和は **オカキ** である.

分母が n である分数が第 n 群に属するとする.

$$\frac{1}{1}, \left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \right| \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \left| \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \right| \frac{1}{5} \ \cdots\cdots$$

(1) $35=2\cdot18-1$ より $\frac{35}{49}$ は第 49 群の 18 番目の数である.

初項から第 n 群の末項までの項数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (項) より

第 48 群の末項までの項数は　$\frac{1}{2}\cdot48\cdot49=1176$

よって $\frac{35}{49}$ は第 $1176+18=\mathbf{1194}$ (項)　である.

(2) 第 1005 項が第 n 群に属するとすると

$\frac{1}{2}(n-1)n<1005\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

$(n-1)n<2010\leqq n(n+1)$

$44\cdot45=1980$,　$45\cdot46=2070$　より　この式を満たす自然数 n は　$n=45$

よって第 1005 項は第 45 群に属する.

初項から第 44 群の末項までの項数は　$\frac{1}{2}\cdot44\cdot45=990$

よって　第 1005 項は, 第 45 群の　$1005-990=15$ (番目)　の数である.

ここで, 第 n 群に属する数の和は

$$\frac{1}{n}+\frac{3}{n}+\frac{5}{n}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{n}$$

$=\frac{1}{n}\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}\{1+(2n-1)\}=\frac{1}{n}\cdot n^2=n$　であることより

求める和は

$$\sum_{k=1}^{44}k+\frac{1}{45}(1+3+5+\cdots\cdots+29)=\frac{1}{2}\cdot44\cdot45+\frac{1}{45}\cdot15^2=\mathbf{995}$$　である.

第 26 講　数列(4)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，a_n と S_n の間には関係式

$S_n=\frac{1}{3}(2^n-a_n-6)$　が成り立つ．

(1)　初項を a_1 とすると，$a_1=$ アイ である．

(2)　S_{n+1} と S_n の差は　$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{\boxed{ウ}}(2^{n+1}-a_{n+1}+a_n-\boxed{エ}^n)$ となる．

よって　a_n と a_{n+1} との関係式　$a_{n+1}=\frac{1}{\boxed{オ}}a_n+\boxed{カ}^{n-2}$　が成り立つ．

(3)　$b_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{\boxed{キ}}b_n+\frac{1}{\boxed{ク}}$　となる．

したがって　$a_n=\frac{1}{\boxed{ケ}}\left\{2^n-\boxed{コ}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$　となる．

(1)　$n=1$ のとき　$S_1=\frac{1}{3}(2-a_1-6)$　つまり　$a_1=\frac{1}{3}(2-a_1-6)$　　よって　$a_1=\mathbf{-1}$

(2)　$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-a_{n+1}-6)-\frac{1}{3}(2^n-a_n-6)=\frac{1}{\mathbf{3}}(2^{n+1}-a_{n+1}+a_n-\mathbf{2}^n)$

$a_{n+1}=\frac{1}{3}(2\cdot 2^n-a_{n+1}+a_n-2^n)$　　$3a_{n+1}=2^n-a_{n+1}+a_n$

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{2^n}{4}$　　よって　$a_{n+1}=\frac{1}{\mathbf{4}}a_n+\mathbf{2}^{n-2}$

(3)　$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+2^{n-2}$　より　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^{n-2}}{2^{n+1}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{8}$

よって　$b_n=\frac{a_n}{2^n}$　とおくと

$b_{n+1}=\frac{1}{\mathbf{8}}b_n+\frac{1}{\mathbf{8}}$　　つまり　$b_{n+1}-\frac{1}{7}=\frac{1}{8}\left(b_n-\frac{1}{7}\right)$　　$b_1-\frac{1}{7}=\frac{a_1}{2^1}-\frac{1}{7}=-\frac{9}{14}$

したがって　数列 $\left\{b_n-\frac{1}{7}\right\}$ は　初項 $-\frac{9}{14}$　公比 $\frac{1}{8}$　の等比数列である．

よって　$b_n-\frac{1}{7}=-\frac{9}{14}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$　　$b_n=\frac{1}{7}\left\{1-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

ゆえに　$a_n=2^nb_n=\frac{1}{\mathbf{7}}\left\{2^n-\mathbf{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

第27講　高次方程式

3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α，β，γ とする．
$\alpha+\beta+\gamma=1$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$a=-$ **ア** ，$b=-$ **イ** ，
$c=-$ **ウ** である．また，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=$ **エオ** である．

3次方程式　$x^3+ax^2+bx+c=0$　の3つの解を α，β，γ とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$

$\alpha\beta\gamma=-c$

である．

$\alpha+\beta+\gamma=1$　より　$-a=1$　　$a=-\mathbf{1}$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$　より　$(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$

つまり　$1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3$　より　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$　　よって　$b=-\mathbf{1}$

また，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$7-3\alpha\beta\gamma=1\cdot(3+1)=4$　　$\alpha\beta\gamma=1$　　よって　$-c=1$　より　$c=-\mathbf{1}$

よって，α，β，γ は3次方程式　$x^3-x^2-x-1=0$　の3つの解であることより

$\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1=0$　　よって　$\alpha^3=\alpha^2+\alpha+1$　より　$\alpha^4=\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

同様に　$\beta^4=\beta^3+\beta^2+\beta$　　$\gamma^4=\gamma^3+\gamma^2+\gamma$

したがって

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha+\beta+\gamma)\\&=7+3+1\\&=\mathbf{11}\end{aligned}$$

第 28 講　証明(1)

［1］ t を 0 でない実数とするとき，$\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$ は $t=$ ア ，$-$ イ のとき最小値 ウ をとる．

$t>0$ のとき $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$ 　よって $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|\geqq 2$

等号成立は $t=\dfrac{1}{t}$ 　$t^2=1$ 　つまり $t=\mathbf{1}$ のとき．

$t<0$ のとき $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=-t-\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{(-t)\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)}=2$ 　よって $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|\geqq 2$

等号成立は $-t=-\dfrac{1}{t}$ 　$t^2=1$ 　つまり $t=-\mathbf{1}$ のとき．

以上より $\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$ の最小値は **2**

［2］ a，b，c，x，y，z が実数のとき，不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$ が成り立つ．これを利用して，a，b，c が $a^2+b^2+c^2=1$ を満たす実数であるとき，$a+b+c$ の最大値を求める．

(エ ^{2} + オ ^{2} + カ ^{2})$(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$ であることより

$(a+b+c)^2\leqq$ キ である．

よって，$a=b=c=\dfrac{\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$ のとき，$a+b+c$ は最大値 $\sqrt{\text{キ}}$ をとる．

コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

において，$x=y=z=1$ のとき

$(\mathbf{1}^2+\mathbf{1}^2+\mathbf{1}^2)(a^2+b^2+c^2)\geqq(1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2=(a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2=1$ より $(a+b+c)^2\leqq\mathbf{3}$

ゆえに $a+b+c\leqq\sqrt{3}$

等号成立は $a:b:c=x:y:z=1:1:1$

つまり $a=b=c$ のとき．これと $a+b+c=\sqrt{3}$ より

$a=b=c=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$ のときである．

第29講　証明(2)

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の条件を満たしている．

$$a_1=1,\ b_1=0,\ a_n=\frac{b_n+b_{n+1}}{2}\quad(n\geqq 1),\ b_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+1}}\quad(n\geqq 1)$$

このとき，$b_{n+1}=\boxed{\text{ア}}a_n-b_n$，$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}{}^{\boxed{\text{イ}}}}{a_n}$ より $b_2=\boxed{\text{ウ}}$，$a_2=\boxed{\text{エ}}$，$b_3=\boxed{\text{オ}}$，$a_3=\boxed{\text{カ}}$ である．これらより，$a_n=n^{\boxed{\text{キ}}}$，$b_n=n(n-\boxed{\text{ク}})$ と推測され，これらが正しいことが数学的帰納法で証明できる．したがって，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{(n-\boxed{\text{ケ}})n(n+\boxed{\text{コ}})}{3}\quad \text{である．}$$

$a_n=\dfrac{b_n+b_{n+1}}{2}$　より　$b_{n+1}=\mathbf{2}a_n-b_n$

$b_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+1}}$　より　$b_{n+1}{}^2=a_na_{n+1}$　よって　$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+1}{}^{\mathbf{2}}}{a_n}$

これらより　$b_2=2a_1-b_1=\mathbf{2}$　　$a_2=\dfrac{b_2{}^2}{a_1}=\mathbf{4}$　　$b_3=2a_2-b_2=\mathbf{6}$　　$a_3=\dfrac{b_3{}^2}{a_2}=\mathbf{9}$

$b_4=2a_3-b_3=12$　　$a_4=\dfrac{b_4{}^2}{a_3}=16$

$\{a_n\}$：1，4，9，16，……　より　$a_n=n^{\mathbf{2}}$　と予想される．

$\{b_n\}$：0，2，6，12，……　より　b_n の階差数列の一般項が $2n$ と予想され，この予想の元に

$n\geqq 2$　のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k=0+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=(n-1)n$　（$n=1$ のときも成立）

であるから，　$b_n=n(n-\mathbf{1})$　と予想される．

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$　より　予想は正しい．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　予想が正しいと仮定すると，$a_k=k^2$　　$b_k=(k-1)k$

このとき　$b_{k+1}=2a_k-b_k=2k^2-(k-1)k=k^2+k=k(k+1)$

$$a_{k+1}=\frac{b_{k+1}{}^2}{a_k}=\frac{k^2(k+1)^2}{k^2}=(k+1)^2$$　より $n=k+1$ のときも予想は正しい．

［Ⅰ］［Ⅱ］より，すべての自然数 n について　$a_n=n^2$，$b_n=n(n-1)$　である．

このとき　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}(n-\mathbf{1})n(n+\mathbf{1})$

第30講　整数問題(1)

[1]　30の階乗の素因数分解を $30!=2^a\times3^b\times5^c\times\cdots\cdots\times23^i\times29^j$　と表したとき，

$a=$ アイ ，$b=$ ウエ ，$c=$ オ

である．また，30! は末尾から続けて カ 個の0が並ぶ．

1から30までの中に，

2の倍数が15個　　2^2 の倍数が7個　　2^3 の倍数が3個　　2^4 の倍数が1個

3の倍数が10個　　3^2 の倍数が3個　　3^3 の倍数が1個

5の倍数が6個　　5^2 の倍数が1個

含まれている．よって

$a=15+7+3+1=\mathbf{26}$　　　$b=10+3+1=\mathbf{14}$　　　$c=6+1=\mathbf{7}$

である．よって　$30!=2^{26}\cdot5^7\cdot M=10^7\cdot N$　（M，N は整数．ただし M は2でも5でも割り切れず，N は10で割り切れない）　と表せるので，30! は末尾から続けて **7** 個の0が並ぶ．

[2]　$P(n)=(n-1)n(n+1)$　とする．n が奇数のとき，$P(n)$ が24の倍数であることを示したい．n が奇数のとき，整数 m を用いて $n=2m-1$　と表すことができる．このとき，

$P(n)=P(2m-1)=$ キ $m(m-1)($ ク $m-1)$

$=$ キ $\{m(m-1)(m-2)+(m-1)m(m+1)\}$

と変形できる．$m(m-1)(m-2)$，$(m-1)m(m+1)$ は連続3整数の積，すなわち6の倍数である．

したがって $P(n)$ は (キ の倍数)×(6の倍数) の形で表すことができる．

したがって，n が奇数のとき，$P(n)$ は24の倍数である．

$n=2m-1$ のとき

$P(n)=P(2m-1)=(2m-1)\cdot2m(2m-2)$

$=\mathbf{4}m(m-1)(\mathbf{2}m-1)$

$=4m(m-1)\{(m-2)+(m+1)\}$

$=4\{m(m-1)(m-2)+(m-1)m(m+1)\}$

$m(m-1)(m-2)$，$(m-1)m(m+1)$ は連続3整数の積，すなわち6の倍数であるので，

$P(n)$ は (4の倍数)×(6の倍数)　の形で表すことができる．

したがって，n が奇数のとき，$P(n)$ は24の倍数である．

第 31 講　整数問題(2)

［1］ $\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n は [ア] 個ある.

$\dfrac{n+32}{n+2}=1+\dfrac{30}{n+2}$　これが整数となるのは $n+2$ が 30 の約数のときである.

$n+2 \geqq 3$　　30 の約数の中で 3 以上のものは　3, 5, 6, 10, 15, 30 の 6 個.

よって, $\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n の個数は **6** 個である.

［2］ $l \leqq m \leqq n$ のとき　$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　……①　を満たす自然数の組 (l, m, n) の個数を求めよう.

l, m は自然数で　$l \leqq m$　より　$\dfrac{1}{m} \leqq \dfrac{1}{l}$ である. また l, n は自然数で　$l \leqq n$　より　$\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{l}$ である.

よって①から　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{\fbox{イ}}{l}$　つまり　$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{\fbox{イ}}{l}$　であることより, l のとり得る最大値は $l=$ [ウ] であることがわかる. $l=1$ のとき　①は

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\fbox{エ}}{\fbox{オ}}$　より　これを満たす (m, n) の組は [カ] 組ある. l のとり得る値を順に①に代入することにより, ①を満たす自然数 (l, m, n) の組数は全部で [キ] 組である.

$l \leqq m \leqq n$ より

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}=\dfrac{\mathbf{3}}{l}$　よって　$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{3}{l}$　より　$l \leqq 2$

よって l のとり得る最大値は　$l=\mathbf{2}$　であることがわかる.

$l=1$ のとき　①より　$1+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　　つまり　　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$mn-2m-2n=0$　　$(m-2)(n-2)=4$

$m \geqq 1$, $n \geqq 1$　より　$m-2 \geqq -1$, $n-2 \geqq -1$　　また, $m \leqq n$ であることより

$(m-2, n-2)=(1, 4), (2, 2)$　　よって　$(m, n)=(3, 6), (4, 4)$　の **2** 組.

$l=2$ のとき　①より　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　　つまり　　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$

$mn-m-n=0$　　$(m-1)(n-1)=1$

$m \geqq 1$, $n \geqq 1$　より　$m-1 \geqq 0$, $n-1 \geqq 0$　　また, $m \leqq n$ であることより

$(m-1, n-1)=(1, 1)$　　よって　$(m, n)=(2, 2)$　の 1 組.

以上より, ①を満たす自然数 (l, m, n) の組は全部で **3** 組である.

第32講　整数問題(3)

整数　$a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めたい．
$a_1=$ **アイ** ，$a_2=$ **ウエオ** 　より，すべての a_n を割り切る可能性がある素数は **カ** のみ．よって求める素数は カ であると予想される．a_k が カ で割り切れると仮定すると，

$a_{k+1}=$ **キク** $\times(-1)^k2^{4k-3}+$ **ケコ** a_k 　より，a_{k+1} も カ で割り切れる．

したがって，数学的帰納法により，すべての a_n を割り切る素数は カ である．

$a_1=19+2=\mathbf{21}=7\times3$

$a_2=19^2+(-1)\cdot2^5=\mathbf{329}=7\times47$

よって　a_n のすべてを割り切る可能性がある素数は **7** のみである．

［Ⅰ］　$a_1=7\times3$　より　a_1 は7で割り切れる．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　a_n が7で割り切れる．つまり $a_k=19^k+(-1)^{k-1}2^{4k-3}$ が7の倍数であると仮定すると，$19^k=a_k-(-1)^{k-1}2^{4k-3}=a_k+(-1)^k2^{4k-3}$　より

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=19^{k+1}+(-1)^k\cdot2^{4k+1}\\&=19\cdot19^k+16\times(-1)^k2^{4k-3}\\&=19\{a_k+(-1)^k2^{4k-3}\}+16\times(-1)^k2^{4k-3}\\&=\mathbf{35}\times(-1)^k2^{4k-3}+\mathbf{19}a_k\end{aligned}$$

より，a_{k+1} も7で割り切れる．

したがって，数学的帰納法により，すべての a_n を割り切る素数は7である．

第33講　総合問題(1)

等式　$x^2-xy+y^2=2$ を満たす実数 x，y について，次の問いに答えよ．

(1)　$p=x+y$，$q=xy$ とおくとき，$q=\dfrac{p^2-\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$　である．

(2)　p のとり得る値の範囲は　$-\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}\leqq p\leqq\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$　である．

(3)　$2x+2y+3xy$ は p を用いて　$p^2+\boxed{オ}p-\boxed{カ}$ と表せる．よって

$2x+2y+3xy$ の最大値は $\boxed{キ}+\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$，最小値は　$-\boxed{コ}$ である．

(1)　$p=x+y$，$q=xy$　とおくと

$x^2-xy+y^2=2$ より　$(x+y)^2-3xy=2$

よって　$p^2-3q=2$　　　したがって　$q=\dfrac{\mathbf{p^2-2}}{\mathbf{3}}$

(2)　$p=x+y$，$q=xy$ より，p，q は2次方程式

$t^2-pt+q=0$　すなわち　$t^2-pt+\dfrac{p^2-2}{3}=0$ の2解．

実数条件より　$p^2-4\cdot\dfrac{p^2-2}{3}\geqq 0$　　$p^2-8\leqq 0$　　よって　$\mathbf{-2\sqrt{2}}\leqq p\leqq 2\sqrt{2}$

(3)　$2x+2y+3xy=2(x+y)+3xy$

$=2p+3q$

$=2p+3\cdot\dfrac{p^2-2}{3}$

$=p^2+\mathbf{2}p-\mathbf{2}$

$=(p+1)^2-3$

$-2\sqrt{2}\leqq p\leqq 2\sqrt{2}$　であることより，$2x+2y+3xy$ は

$p=2\sqrt{2}$　$(q=2)$　のとき　最大値　$\mathbf{6+4\sqrt{2}}$

$p=-1$　$\left(q=-\dfrac{1}{3}\right)$　のとき　最小値　$\mathbf{-3}$　　をとる．

第 34 講　総合問題(2)

(1)　$a+b+c=6m$，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の組は
アイ m^2+ **ウ** $m+1$ 通りある．

(2)　(1)のうち，$a=b$ を満たすものは **エ** $m+1$ 通りあり，a，b，c のどの 2 つも異なるものは **オカ** m^2 通りある．

(3)　$a+b+c=6m$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，$0\leqq a<b<c$ を満たす組は **キ** m^2 通りであり，$0\leqq a\leqq b\leqq c$ を満たす組は **ク** m^2+ **ケ** $m+1$ 通りある．

(1)　$6m$ 個の○とそれを 3 つに区切る 2 本の棒の順列の総数で

$${}_{6m+2}\mathrm{C}_2=\frac{(6m+2)(6m+1)}{2\cdot 1}=(3m+1)(6m+1)=\mathbf{18}m^2+\mathbf{9}m+1\quad(\text{通り})$$

(2)　(1)のうち，$a=b$ を満たすものは

$a=b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 3m$　の　$\mathbf{3}m+1$ 通りある．

$b=c$，$c=a$ も同数である．

また，$a=b=c$ を満たすものは　$(2m,\ 2m,\ 2m)$ の 1 通り．

したがって，(1)を満たすもので，a，b，c のうち少なくとも 2 つが等しいものは

$(3m+1)\times 3-2=9m+1$（通り）　である．

ゆえに(1)を満たすもので，a，b，c のどの 2 つも異なるものは

$18m^2+9m+1-(9m+1)=\mathbf{18}m^2$（通り）　である．

(3)　$a+b+c=6m$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，$0\leqq a<b<c$ を満たす組は，a，b，c のどの 2 つも異なるものの組数のうち，組合せとして同じものを 1 組と考えたものである．

よって(2)より　$\dfrac{18m^2}{3!}=\mathbf{3}m^2$（通り）

また，$a=b<c$　を満たすものが　$a=b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$ の $2m$ 通り

$a<b=c$　を満たすものが　$b=c=2m+1,\ 2m+2,\ \cdots\cdots,\ 3m-1,\ 3m$ の m 通り

これに　$a=b=c$　の 1 通りを合わせると，$0\leqq a\leqq b\leqq c$ を満たす組は

$3m^2+2m+m+1=\mathbf{3}m^2+\mathbf{3}m+1$（通り）

第35講　総合問題(3)

赤い本が2冊，青い本が n 冊ある．この $n+2$ 冊の本を無作為に1冊ずつ，本棚に左から並べていく．2冊の赤い本の間にある青い本の冊数を X とする．
例えば $n \geqq 3$ のとき，$X=3$ となる場合について考える。このとき，2冊の赤い本の間に3冊の青い本がある．2冊の赤い本のうち1冊目を置く場所は　$n-$ ア 通りある．

よって，$X=3$ となる確率は　$\dfrac{n-\boxed{\text{ア}}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$ である．

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対し，$X=k$ となる確率を $P(X=k)$ とすると，

$P(X=k)=\dfrac{n-k+\boxed{\text{イ}}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．したがって，X の期待値は　$\dfrac{n}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

$n \geqq 3$ で，$X=3$ のとき　$n+2$ 冊の本の列の中に　赤青青青赤　の列が存在する．2冊の赤い本のうち1冊目を置く場所は　左から1番目から $n-2$ 番目までの　$n-\mathbf{2}$ 通りある．

よって，$X=3$ となる確率は　$\dfrac{n-2}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．

$X=k$ となるとき，1冊目の本を置く場所は左から1番目から $n-k+1$ 番目までの $n-k+1$ 通りある．よって　$P(X=k)=\dfrac{n-k+\mathbf{1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．

したがって，X の期待値は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} k(n-k+1) \\
&= \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} \sum_{k=0}^{n} \{-k^2+(n+1)k\} \\
&= \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} \cdot \left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)] \\
&= \frac{n}{\mathbf{3}}
\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第36講　総合問題(4)

$0<a<1$ のとき　x についての方程式

$$\log_2(8ax-1)+\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}+1=\log_2 2a \quad \cdots\cdots①$$

の解 x を求める．①の真数条件より $x>\frac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　$\cdots\cdots②$　である．

$\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}=\log_{\boxed{ア}}(x-\boxed{イ})$，　$\log_2 2a=\boxed{ウ}+\log_2\boxed{エ}$　より

①は　$x\{\boxed{オ}ax-(\boxed{カ}a^2+1)\}=0$　と変形できる．

②かつ $0<a<1$ より　$x\neq0$　であるから　$x=\frac{\boxed{カ}a^2+1}{\boxed{オ}a}$　であり，これは②を満たす．

ここで　$x=\boxed{キ}+\frac{1}{\boxed{ク}a}$　と変形できることにより，x は $a=\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$ のとき最小値 $\frac{1}{\sqrt{\boxed{サ}}}$ をとる．

①の真数条件より　$x>\frac{1}{8a}$　かつ　$x>a$　$\cdots\cdots②$

$\frac{\log_a(x-a)}{\log_a 2}=\log_{\mathbf{2}}(x-\boldsymbol{a})$，$\log_2 2a=\mathbf{1}+\log_2\boldsymbol{a}$　より

①は　$\log_2(8ax-1)+\log_2(x-a)+1=1+\log_2 a$

$\log_2(8ax-1)(x-a)=\log_2 a$

$(8ax-1)(x-a)=a$

$8ax^2-(8a^2+1)x=0$

$x\{\mathbf{8}ax-(\mathbf{8}a^2+1)\}=0$

ここで，$x>a$，$0<a<1$　より　$x\neq0$　であるから　$x=\frac{8a^2+1}{8a}$

また，$x=\boldsymbol{a}+\frac{1}{\mathbf{8}a}$　と変形でき，$a>0$，$\frac{1}{8a}>0$　であることより，相加平均と相乗平均の関係から　$a+\frac{1}{8a}\geqq2\sqrt{a\cdot\frac{1}{8a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

等号成立は　$a=\frac{1}{8a}$　　$a^2=\frac{1}{8}$　　$0<a<1$ より

$a=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$ のとき　x は最小値　$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{2}}}$ をとる．

第37講　総合問題(5)

実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる2本の接線を引き，2つの接点を通る直線を l とする．

(1)　直線 l の方程式は　$x+$ [ア] $ty=$ [イ]　である．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず l が通る点がある．この点の座標は
　([ウ], [エ]) である．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた相異なる接線を l_1，l_2 とし，l_1，l_2 と円との接点をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，l_1，l_2 の方程式はそれぞれ

$$x_1x+y_1y=1,\quad x_2x+y_2y=1$$

と表される．これらがともに　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ を通るので

$$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1,\quad \frac{1}{2}x_2+ty_2=1$$

これらは直線　$\frac{1}{2}x+ty=1$ が2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることを表している．

したがって求める直線 l の方程式は　$\frac{1}{2}x+ty=1$　つまり　$\boldsymbol{x+2ty=2}$　である．

(2)　$x+2ty=2$　より　$2yt+(x-2)=0$

これが $t>1$ である任意の実数 t で成り立つための条件は

$$2y=0\quad かつ\quad x-2=0\qquad つまり\quad x=2,\ y=0\quad である．$$

したがって，l は t $(t>1)$ の値によらず定点　$\boldsymbol{(2,\ 0)}$　を通る．

第38講　総合問題(6)

x の3次方程式 $x^3-3x-a=0$ の3解を α, β, γ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする．定数 a を $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲で動かすとき，次の問いに答えよ．

(1) α, β, γ のとりうる値の範囲は

$-\sqrt{\boxed{ア}} \leqq \alpha \leqq -\boxed{イ}$,　$-\boxed{ウ} \leqq \beta \leqq \boxed{エ}$,　$\sqrt{\boxed{オ}} \leqq \gamma \leqq \boxed{カ}$

である．

(2) $\alpha+\beta$ の最大値は $-\sqrt{\boxed{キ}}$ である．

(1) $x^3-3x-a=0$ ……① より $x^3-3x=a$

よって①の3解 α, β, γ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ は

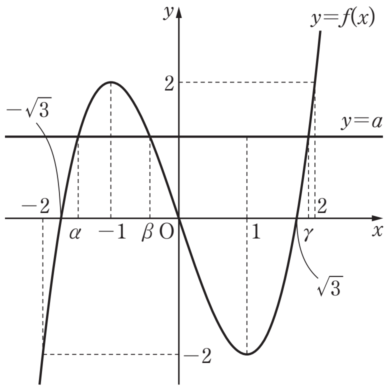
$f(x)=x^3-3x$ と $y=a$ の共有点の x 座標である．

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(-1)=2$, $f(1)=-2$

また，$f(2)=2$, $f(-2)=-2$

よって $y=f(x)$ のグラフは右図．



$0 \leqq a \leqq 2$ を考慮して，

$-\sqrt{\mathbf{3}} \leqq \alpha \leqq -\mathbf{1}$,　$-\mathbf{1} \leqq \beta \leqq \mathbf{0}$,　$\sqrt{\mathbf{3}} \leqq \gamma \leqq \mathbf{2}$

(2) ①の3解が α, β, γ であることより，解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=0$　　つまり　$\alpha+\beta=-\gamma$

よって $\alpha+\beta$ が最大となるのは，γ が最小となるとき．

(1)より γ は $a=0$ のとき 最小値 $\sqrt{3}$ をとる．

このとき $\alpha+\beta$ は最大値 $-\sqrt{\mathbf{3}}$ をとる．

第39講　総合問題(7)

O を原点とする座標空間上の3点を　A(4, 2, 2), B(1, 3, 1), C(1, 1, 3) とする.

(1)　三角形 ABC の面積は $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である.

(2)　O から平面 ABC に垂線 OH を下ろし, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおくと,

$s=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$, $t=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である. したがって, 四面体 OABC の体積は $\boxed{キ}$ である.

(1)　$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,\ -1,\ 1)$ より

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9-1-1=7$　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

よって △ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11\cdot11-49}=\frac{1}{2}\sqrt{72}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

(2)　$\overrightarrow{OA}=(4,\ 2,\ 2)$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-12+2-2=-12$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-12-2+2=-12$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12+11s+7t=0$

よって　$11s+7t=12$　…①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=-12+7s+11t=0$

よって　$7s+11t=12$　…②

①, ②より　$s=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$, $t=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\{3(4,\ 2,\ 2)+2(-3,\ 1,\ -1)+2(-3,\ -1,\ 1)\}$

$=\dfrac{1}{3}(0,\ 6,\ 6)=(0,\ 2,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

したがって四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=\mathbf{4}$

第 40 講　総合問題(8)

等差数列 1，2，3，……，20 がある．

(1)　異なる 2 項の積の総和は **アイウエオ** である．

(2)　p，q を異なる項とするとき，$p\times q^2$ の総和は **カキクケコサ** である．

(1)　異なる 2 項を p，q（$p<q$）とする．

$q=k$（$k=2$，3，4，……，20）のとき，p は 1 から $k-1$ の $k-1$ 通りある．

よって　$q=k$ のときの積 pq の総和は

$$pq=\{1+2+3+\cdots\cdots+(k-1)\}\cdot k=\frac{1}{2}(k-1)k\cdot k=\frac{1}{2}(k^3-k^2)$$

したがって求める総和は

$$\sum_{k=2}^{20}\frac{1}{2}(k^3-k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^3-k^2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}\cdot 20^2\cdot 21^2-\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(44100-2870)=\mathbf{20615}$$

（別解）　求める総和を S とおくと

$$S=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+20)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2)\}$$　（以下略）

(2)　異なる 2 項 p，q について，

$q=k$（$k=1$，2，3，……，20）のとき，p は 1 から 20 のうち，k と異なる数である．

よって　$q=k$ のときの積 pq^2 の総和は

$$pq^2=\{(1+2+3+\cdots\cdots+20)-k\}\cdot k^2=(210-k)k^2=210k^2-k^3$$

したがって求める総和は

$$\sum_{k=1}^{20}(210k^2-k^3)=210\cdot 2870-44100=\mathbf{558600}$$

（別解）　求める総和を T とおくと

$$T=(1+2+3+\cdots\cdots+20)(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2)-(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+20^3)$$

（以下略）

第41講　総合問題(9)

※この講の練習問題より「実践問題」となります．講義問題の内容と必ずしも一致しません．

a を実数とする．x に関する方程式　$\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$　……①　が異なる2つの実数解をもつとき，a の取りうる値の範囲を求めたい．

①の真数条件により，$a>$ [ア] のとき $x>\dfrac{a+3}{4}$　　$a\leqq$ [ア] のとき $x>1$ である．

このとき①を変形すると　$(x-1)^{[イ]}=4x-a-3$　……②　である．左辺，右辺をそれぞれ x の関数と考えると，2つの関数のグラフの共有点の x 座標のうち，①の真数条件を満たすものが2つ存在すればよい．$a>$ [ア] のとき　グラフから②が異なる2実数解をもてばそれは必ず真数条件を満たすことがわかり，このとき a の取りうる値の範囲は [ウ] $<a<$ [エ] である．同様に $a\leqq$ [ア] のときも考えて，求める a の範囲は [オ] $<a<$ [カ] である

真数は正であることより　$x>1$　かつ　$x>\dfrac{a+3}{4}$　である．

よって　$1<\dfrac{a+3}{4}$　つまり　$a>\mathbf{1}$　のとき　真数条件は　$x>\dfrac{a+3}{4}$

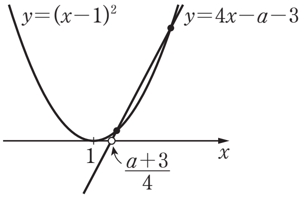
$a\leqq 1$ のとき　真数条件は　$x>1$　である．

このもとで，①は　$\log_3(x-1)=\dfrac{\log_3(4x-a-3)}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}\{\log_3(4x-a-3)\}$

　つまり　$\log_3(x-1)^2=\log_3(4x-a-3)$　より　$(x-1)^{\mathbf{2}}=4x-a-3$　……②　と変形できる．

$y=(x-1)^2$ と $y=4x-a-3$ のグラフの共有点について考える．

$a>1$ のとき

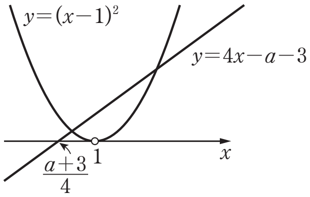


　グラフより　②すなわち $x^2-6x+a+4=0$ が異なる2つの実数解をもてば，それは必ず真数条件　$x>\dfrac{a+3}{4}$　を満たす．

　よって判別式 $D>0$ より　$9-(a+4)>0$　　$a<5$

　したがって　$\mathbf{1<a<5}$

$a\leqq 1$ のとき



　グラフより　②は $x>1$ に異なる2解をもたず不適．

以上より　求める a の範囲は　$\mathbf{1<a<5}$　である．

第42講　総合問題⑽

x が実数全体を動くとき，関数 $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+1}{\cos x-3\sin x+5}$ ……①がとる値の範囲を求めたい．

$X=\cos x$，$Y=\sin x$ とおくと，XY 平面において点 $(X,\ Y)$ の描く軌跡は円であり，また①は X，Y の1次式，すなわち直線を表す．この円と直線が共有点をもてば，その点に対し x，そして y が定まる．

したがって，求める y の範囲は

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\sqrt{\boxed{カキ}}\leqq y\leqq\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\sqrt{\boxed{カキ}}$ である．

$X=\cos x$，$Y=\sin x$ とおくと，$X^2+Y^2=1$

これは XY 平面において原点中心，半径1の円を表す．

また，①は　$y=\dfrac{X+2Y+1}{X-3Y+5}$　……②　であり，$X-3Y+5>-1-3\cdot1+5=1$ より②の分母が0になることはない．よって②より

$y(X-3Y+5)=X+2Y+1$　すなわち　$(y-1)X-(3y+2)Y+5y-1=0$　……③

これは XY 平面において直線を表す．

円 $X^2+Y^2=1$ と直線③が共有点をもつのは，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線③の距離が円の半径1以下であるとき．

よって　$\dfrac{|5y-1|}{\sqrt{(y-1)^2+(3y+2)^2}}\leqq1$

$(5y-1)^2\leqq(y-1)^2+(3y+2)^2$

$15y^2-20y-4\leqq0$

したがって求める y の範囲は　$\dfrac{10-\sqrt{160}}{15}\leqq y\leqq\dfrac{10+\sqrt{160}}{15}$

すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{15}\sqrt{10}}\leqq y\leqq\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{15}\sqrt{10}$　である．

第 43 講　総合問題⑾

$\{a_n\}$ は，初項 $a_1=-1$，公差 d の等差数列で，$\{b_n\}$ は，初項 $b_1=2011$，公比 r の等比数列とする．ただし，$d\neq 0$，$r\neq 0$　とする．これらの数列が
$a_nb_{n-1}+3b_na_{n-1}-2b_{n-1}=0$（$n\geqq 2$）を満たしている．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は　$a_n=$ ［ア］ $n-$ ［イ］，　$b_n=2011\cdot\left(-\dfrac{［ウ］}{［エ］}\right)^{n-1}$ である．

(2)　$|b_n|<|a_n|$ となる最小の n の値は　$n=$ ［オ］ である．

(1)　$a_n=-1+(n-1)d$　　$b_n=2011\cdot r^{n-1}$

これらを　$a_nb_{n-1}+3b_na_{n-1}-2b_{n-1}=0$　に代入すると，

$\{-1+(n-1)d\}\cdot 2011\cdot r^{n-2}+3\cdot 2011\cdot r^{n-1}\{-1+(n-2)d\}-2\cdot 2011\cdot r^{n-2}=0$

この両辺を　$2011\cdot r^{n-2}(\neq 0)$ で割ると

$-1+(n-1)d+3r\{-1+(n-2)d\}-2=0$

つまり　$(d+3dr)n+(-3-d-3r-6rd)=0$

これが　$n\geqq 2$　である全ての自然数 n で成立するのは

$d+3dr=0$　……①　　かつ　$-3-d-3r-6rd=0$　……②　のとき．

$d\neq 0$ より　①から　$1+3r=0$　　$r=-\dfrac{1}{3}$　　　このとき②より　$d=2$

したがって　$a_n=\mathbf{2}n-\mathbf{3}$，$b_n=2011\cdot\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{n-1}$

(2)　$n=1$ のとき　$a_1=-1$，$b_1=2011$　より　$|b_1|>|a_1|$

$n\geqq 2$ のとき　$|a_n|=|2n-3|=2n-3$

また　$|b_n|=\left|2011\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right|=2011\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　$|b_n|<|a_n|$　より　$2011\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}<2n-3$　　つまり　$(2n-3)\cdot 3^{n-1}>2011$

$f(n)=(2n-3)\cdot 3^{n-1}$　とおくと，$f(n)$ は単調増加．

$f(2)=3$，　$f(3)=27$，　$f(4)=135$，　$f(5)=567$，　$f(6)=2187$

したがって，$|b_n|<|a_n|$ を満たす最小の n は　$n=\mathbf{6}$

第 44 講　総合問題⑿

正の整数 n，k に対し，n を k 個の整数の和で表す方法の総数を $p(n,\ k)$ で表す．ここで順番が異なっているだけのものは同じとみなす．また，$n<k$ のときは　$p(n,\ k)=0$ とする．たとえば 5 を 3 個の正の整数の和で表す方法は $5=1+1+3=1+2+2$　の 2 通りである．したがって　$p(5,\ 3)=2$　となる．

(1)　n が偶数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n}{\boxed{\text{ア}}}$　　n が奇数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

である．

(2)　$n>3$ のとき，$n=a+b+c$（$a\leqq b\leqq c$，a，b，c は整数）と表すと，

$$p(n,\ 3)=p(n-1,\ 2)+p(n-3,\ 3)$$

が成り立つ．このことを利用すると，$p(6,\ 3)=\boxed{\text{エ}}$ である．

また，$n\geqq 2$ のとき　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}+p(6(n-1),\ 3)$　であることより，$p(6n,\ 3)$ を n の式で表すと　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{キ}}\,n^{\boxed{\text{ク}}}$　である．

(1)　n が偶数のとき，n を 2 個の正の整数の和で表す方法は

$$1+(n-1),\ 2+(n-2)+,\ \cdots\cdots,\ \frac{n}{2}+\frac{n}{2}\quad の\quad \frac{n}{2}\ 通り$$

n が奇数のとき，n を 2 個の正の整数の和で表す方法は

$$1+(n-1),\ 2+(n-2)+,\ \cdots\cdots,\ \frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}\quad の\quad \frac{n-1}{2}\ 通り$$

よって　n が偶数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n}{\mathbf{2}}$　　n が奇数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2)　$n=1$ のとき　$p(6n,\ 3)=p(6,\ 3)=p(5,\ 2)+p(3,\ 3)$

ここで　(1)より　$p(5,\ 2)=2$

また，$p(3,\ 3)$ は 3 を 3 個の正の整数で表す方法で，$1+1+1$ の 1 通り

よって　$p(6,\ 3)=2+1=\mathbf{3}$

$n\geqq 2$ のとき　$p(6n,\ 3)=p(6n-1,\ 2)+p(6n-3,\ 3)$

$$=\frac{(6n-1)-1}{2}+p(6n-4,\ 2)+p(6n-6,\ 3)$$

$$=3n-1+\frac{6n-4}{2}+p(6(n-1),\ 3)$$

$$=\mathbf{6}n-\mathbf{3}+p(6(n-1),\ 3)$$

$p(6n,\ 3)=a_n$　とおくと　$a_1=3$，$a_n=a_{n-1}+6n-3$

よって，$n\geqq 2$　のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=3+\sum_{k=2}^{n}(6k-3)=\sum_{k=1}^{n}(6k-3)$

$$=3n(n+1)-3n=3n^2\quad（n=1\ のときも成立）$$

したがって　$p(6n,\ 3)=\mathbf{3}n^{\mathbf{2}}$

第 45 講　総合問題⒀

0，1，2，3，4，5　の 6 つの数字を重複せずに用いて，n 桁の整数を作る　($n \leqq 6$)．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n=3$，すなわち 3 桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも 5 にならないような整数は **アイ** 通りである．

(2)　$n=4$，すなわち 4 桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも 3 にならないような整数は **ウエオ** 通りである．

(1)　和が 5 になる 2 つの数字の組み合わせは　(5，0)，(4，1)，(3，2) である．

百の位は 0 以外の数で 5 通り．百の位で選んだ数字と十の位の数字の和が 5 にならない十の位の選び方は　4 通り．同様に一の位の数字の選び方は 3 通り．

したがって，求める総数は　$5\cdot4\cdot3=\mathbf{60}$（通り）

(2)　4 桁の整数は全部で $5\cdot5\cdot4\cdot3=300$（通り）　このうち，隣り合う数字の和が 3 になる箇所がある場合を考える．和が 3 になる 2 つの数字の組み合わせは　(3，0)，(2，1) である．

(i)　和が 3 になる箇所が 2 つあるとき

その箇所は千と百の位，十と一の位の 2 つである．4 桁に 0，1，2，3 の数字が入る．

千の位は 1，2，3 の 3 通り．その各々に対し，百の位の選び方は 1 通り．

十，一の位は残り 2 数の順列で 2 通り．　　よって　$3\times2=6$（通り）

(ii)　和が 3 になる箇所が 1 つのみのとき

千と百の位の和が 3 になるとき，千の位は 3 通り．その各々に対し，百の位は 1 通り．

十，一の位の数字は，残り 4 つの数字の順列から，和が 3 になる 2 数の順列を除いた

${}_4\mathrm{P}_2-2!=4\cdot3-2=10$　通り．　　よって　$3\times10=30$（通り）

百と十の位の和が 3 になるとき

千の位は，百の位が 0，3 のときは 4 通り，1，2 のときは 3 通り．

十の位は 1 通り，一の位は 3 通り．　　よって　$2\times4\times3+2\times3\times3=42$（通り）

十と一の位の和が 3 になるとき．

十の位が 0，3 のとき，一の位は 1 通り．千と百の位は　${}_4\mathrm{P}_2-2!=10$（通り）

十の位が 1，2 のとき，一の位は 1 通り．

千の位が 3 のとき，百の位は 4，5 の 2 通り．

千の位が 4，5 のとき，百の位は 3 通り．

よって　$2\times10+2\times(1\times2+2\times3)=20+16=36$（通り）

以上より，求める総数は　$300-(6+30+42+36)=\mathbf{186}$（通り）

第46講　総合問題⒁

(1)　実数 x に関する連立不等式　$x \geqq -1,\ 2\cdot3^x + a\cdot3^{-x} \leqq 1$　が解をもつような実数 a の範囲は　$a \leqq \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$　である.

(2)　$x \geqq -1$　を満たすすべての実数 x に対し不等式　$3^x + a\cdot3^{-x} \geqq a$　が成り立つような実数 a の範囲は　$-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \leqq a \leqq \boxed{オ}$　である.

(1)　$t=3^x$　とおく.　$x \geqq -1$　に解をもつときの t の範囲は　$t \geqq \dfrac{1}{3}$

$2\cdot3^x + a\cdot3^{-x} \leqq 1$　より　$2\cdot(3^x)^2 - 3^x + a \leqq 0$

よって　$2t^2 - t + a \leqq 0$　この不等式が　$t \geqq \dfrac{1}{3}$　に解をもてばよい.

$f(t) = 2t^2 - t + a = 2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2 + a - \dfrac{1}{8}$　とおくと　(グラフの軸)$\leqq \dfrac{1}{3}$ より

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) \leqq 0$　であればよい.　　よって　$2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3} + a \leqq 0$　より　$a \leqq \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

(2)　$3^x + a\cdot3^{-x} \geqq a$　より　$(3^x)^2 - a\cdot3^x + a \geqq 0$　　つまり

(1)同様に　$t=3^x$　とおくと　$t^2 \geqq a(t-1)$

$t \geqq \dfrac{1}{3}$　を満たすすべての t で　$y=t^2$　……①　のグラフが

$y=a(t-1)$　……②　のグラフより上にあるときを考える.

②は $(1,\ 0)$ を通る傾き a の直線である.

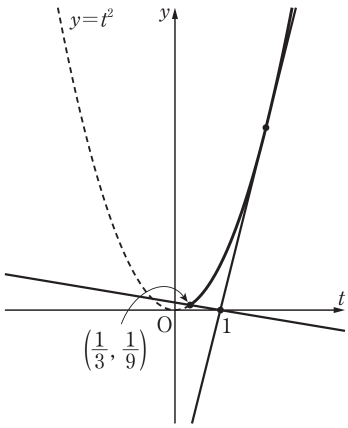
①と②が接するのは

$t^2 = a(t-1)$　つまり　$t^2 - at + a = 0$　で

判別式　$a^2 - 4a = 0$ のとき

よって　$a = 0,\ 4$

②が①上の点　$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$　を通るのは　　$a = -\dfrac{1}{6}$



よってグラフより求める a の範囲は　$-\mathbf{\dfrac{1}{6}} \leqq a \leqq \mathbf{4}$

第 47 講　総合問題⒂

三角形 ABC において $\angle A=\theta$，$\angle B=2\theta$ であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ を $\cos\theta$ を用いて表すと $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=$ **ア** $\cos\theta$ である．

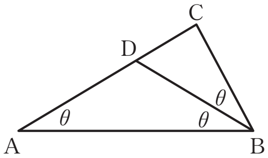
(2) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}$ の値が最大となるとき，

$\cos\theta=\dfrac{\boxed{イ}+\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$ である．

(3) $\angle B$ の二等分線と辺 AC との交点を D とするとき，等式

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}+\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|}+\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|}$$

を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}$ である．



(1) 正弦定理より $\dfrac{BC}{\sin\theta}=\dfrac{AC}{\sin 2\theta}$

よって $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\mathbf{2}\cos\theta$

(2) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos(\pi-3\theta)$

$=\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=-4\cos^3\theta+2\cos^2\theta+4\cos\theta-1$ ……①

$t=\cos\theta$ とおくと $0<3\theta<\pi$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ 　よって $\dfrac{1}{2}<t<1$

このとき ①より $-4t^3+2t^2+4t-1$

これを $f(t)$ とおくと

$f'(t)=-12t^2+4t+4=-4(3t^2-t-1)$

$f'(t)=0$ より $t=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

t	$\left(\frac{1}{2}\right)$	…	$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$	…	(1)
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

したがって，与式が最大となるのは $\cos\theta=\mathbf{\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}}$ のときである．

(3) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|}+\dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DB}||\overrightarrow{DA}|}=\cos\theta+\cos\theta+\cos(\pi-2\theta)$

$=2\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)=-2\cos^2\theta+2\cos\theta+1$

よって与式は $-4t^3+2t^2+4t-1=-2t^2+2t+1$ つまり $2t^3-2t^2-t+1=0$

$(t-1)(2t^2-1)=0$ 　$\dfrac{1}{2}<t<1$ より $t=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 　よって $\theta=\mathbf{\dfrac{\pi}{4}}$

第48講　総合問題⒃

a，b を定数とする関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が条件

　㈀　$f(1)=p$　（p は $p \geqq 1$ を満たす定数）　　㈁　$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 0$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1)　定数 a がとる範囲を p を用いて表すと　$-$［ア］$-$［イ］$\sqrt{p} \leqq a \leqq p-$［ウ］

　である．

(2)　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ が最小値をとるとき，$b=$［エ］である．また，その最小値が2と

　なるのは　$p=\dfrac{［オカ］}{4}$　のときである．

(3)　p が(2)で求められた値をもつとき，定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ の最大値は　$\dfrac{［キク］}{［ケコ］}$　である．

条件㈀より　$1+a+b=p$　……①

(1)　$f(x)=x(x^2+ax+b)$　より　$f(0)=0$

　よって条件㈁より　$x>0$ のとき　$f(x) \geqq 0$　すなわち　$x^2+ax+b \geqq 0$　であればよい．

　①より　$x^2+ax+b=x^2+ax+p-a-1$　これを　$g(x)$ とおく．軸：$x=-\dfrac{a}{2}$

　$-\dfrac{a}{2} \leqq 0$　つまり　$a \geqq 0$　のとき　　$g(0)=p-a-1 \geqq 0$　よって　$0 \leqq a \leqq p-1$

　$-\dfrac{a}{2} \geqq 0$　つまり　$a \leqq 0$　のとき

　$g(x)=0$ の判別式 D について　$D=a^2-4(p-a-1) \leqq 0$

　　$a^2+4a-4p+4 \leqq 0$　　　$-2-2\sqrt{p} \leqq a \leqq -2+2\sqrt{p}$

　よって　$-2-2\sqrt{p} \leqq a \leqq 0$

　以上より　$\boldsymbol{-2-2\sqrt{p} \leqq a \leqq p-1}$

(2)　$\int_0^1 f(x)dx=\left[\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}ax^3+\dfrac{1}{2}bx^2\right]_0^1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}$　……②

　①より　②$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{p-a-1}{2}=-\dfrac{a}{6}+\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{4}$　……③

　③を a の関数とみると単調減少．

　よって　(1)より　$a=p-1$　のとき最小値をとる．このとき　①より　$\boldsymbol{b=0}$

　さらにこのとき，②$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{3}$ が2となるのは　$a=\dfrac{21}{4}$ のとき．このとき　$p=\boldsymbol{\dfrac{25}{4}}$

(3)　$p=\dfrac{25}{4}$　のとき　③$=-\dfrac{a}{6}+\dfrac{23}{8}$　これが最大となるのは

　(1)より　$a=-2-2\sqrt{p}=-7$　のとき．よって求める最大値は　$\dfrac{7}{6}+\dfrac{23}{8}=\boldsymbol{\dfrac{97}{24}}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。